TOME 18 — N° 6 — JUIN 1957

LE JOURNAL DE PHYSIQUE

ET

LE RADIUM

L'ÉLASTICITÉ DU MILIEU CRISTALLIN

III. — LES DÉFORMATIONS LINÉAIRES (ÉLASTICITÉ STATIQUE).

Par JEAN LAVAL,
Collège de France, Paris.

1. **Déformation linéaire.** — Une déformation linéaire (ou homogène) est celle qui conserve la triple périodicité du milieu cristallin. Elle imprime des déplacements uniformes aux positions moyennes des atomes :

$$u_j^{m\alpha} = \lambda^{j\alpha} + \sum_\gamma t_\gamma^\alpha (m^\gamma + j^\gamma) ; \qquad \alpha, \gamma = 1, 2, 3. \qquad (1)$$

Chaque déformation élémentaire t_γ^α est constante : la même dans tout le volume du cristal

$$t_\gamma^\alpha = \left[\frac{\partial u_j^{m\alpha}}{\partial x_j^{m\gamma}}\right]_{(\boldsymbol{x}_j^m = \boldsymbol{m} + \boldsymbol{j})}.$$

Les déplacements $u_j^{m\alpha}$ (1) développent entre deux atomes, mj et pk, des forces de rappel $\boldsymbol{f}_{j\ k}^{m-p}, \boldsymbol{f}_{k\ j}^{p-m}$:

$$f_{i\ \ k}^{m-p}{}_{\alpha} = \sum_\beta C_{j\ k}^{m-p}{}_{\alpha\ \beta} (\lambda^{j\beta} - \lambda^{k\beta})$$
$$+ \sum_{\beta\delta} C_{j\ k}^{m-p}{}_{\alpha\ \beta}\, t_\delta^\beta (m^\delta + j^\delta - p^\delta - k^\delta) ; \quad \beta, \delta = 1, 2, 3, \quad (2)$$

La déformation produit des tensions dans le milieu cristallin. Mais, lorsqu'elle est accomplie, chaque atome se trouve, sous les tensions exercées, en équilibre dans sa nouvelle position moyenne. Donc la force de rappel globale qui lui est appliquée s'annule lorsqu'il est dans cette position :

$$\sum_{\substack{pk \\ (p+k \neq m+j)}} f_{i\ \ k}^{m-p}{}_{\alpha} = 0 ; \qquad \alpha = 1, 2, 3. \qquad (3)$$

Si le motif cristallin est monoatomique, les positions moyennes de tous les atomes occupent des centres de symétrie. Après la déformation, elles se trouvent encore sur des centres de symétrie ; et la force de rappel globale (3) exercée sur chaque atome dans une telle position est nulle, car ses composantes, les forces de rappel élémentaires, $\boldsymbol{f}_{j\ k}^{m-p}$ (2), sont deux à deux égales et directement opposées. Le même fait se produit pour un motif cristallin biatomique lorsque la position moyenne de chaque atome coïncide encore avec un centre de symétrie (sel gemme). En ce cas, la déformation reste strictement linéaire, c'est-à-dire :

$$\lambda^j = 0 ; \qquad j = 1, 2.$$

Mais, si le motif cristallin est polyatomique les forces de rappel élémentaires $\boldsymbol{f}_{j\ k}^{m-p}$ (2) développées par une déformation strictement linéaire ($\boldsymbol{\lambda}^j = 0$) ne satisfont plus, en général, aux égalités (3). Les réseaux formés par les différents atomes du motif cristallin se déplacent les uns par rapport aux autres ; et leurs déplacements sont tels qu'ils annulent la force de rappel globale (3) exercée sur chaque atome. Donc

$$\sum_{pk\varepsilon} C_{j\ k}^{m-p}{}_{\alpha\ \varepsilon} \lambda^{k\varepsilon} - \sum_{pk} \sum_{\beta\delta} C_{i\ k}^{m-p}{}_{\alpha\ \beta}\, t_\delta^\beta (m^\delta + j^\delta - p^\delta - k^\delta) = 0 ;$$
$$\varepsilon = 1, 2, 3$$

ou, en prenant en compte les coefficients $\Gamma_0{}_{\alpha\varepsilon}^{jk}$ (22, II) et $\mathcal{C}_{\alpha\beta}^{j\delta}$ (30, II) ([1])

$$\sum_{k\varepsilon} \Gamma_0{}_{\alpha\varepsilon}^{jk} \lambda^{k\varepsilon} = - v \sum_{\beta\delta} \mathcal{C}_{\alpha\beta}^{j\delta}\, t_\delta^\beta. \qquad (4)$$

Nous obtenons $3g$ équations linéaires dont les inconnues sont les déplacements $\lambda^{k\varepsilon}$. Les coefficients $\Gamma_0{}_{\alpha\varepsilon}^{jk}$ satisfont les égalités (25, II). De même, compte tenu de (38, I)

$$\sum_j \mathcal{C}_{\alpha\beta}^{j\delta} = 0. \qquad (5)$$

([1]) Il sera entendu : que le chiffre romain I désigne une formule se trouvant dans la première partie du mémoire : « Énergie potentielle d'un cristal et constantes de rappel atomiques » ; le chiffre romain II, une formule se trouvant dans la seconde partie : « Dynamique des ondes élastiques. »

Donc les équations (4) admettent toujours une solution. Celles-ci n'implique nulle relation entre les neuf déformations t^{β}_{δ}. Elles peuvent varier indépendamment. *Un cristal peut subir n'importe quelle déformation linéaire pourvu qu'elle reste minime.*

Mais la matrice Γ_0 (22, II) est seulement de rang $3g - 3$ (25, II). De même que les différences $y^{j\varepsilon}_{\beta} - y^{k\varepsilon}_{\beta}$ (24, 27, II), les déplacements relatifs $\lambda^{j\varepsilon} - \lambda^{k\varepsilon}$ sont seuls définis. Prenons l'origine des coordonnées sur un atome en position n dans la maille. Les déplacements relatifs $\lambda^{k\varepsilon} - \lambda^{n\varepsilon}$ sont déterminés par les $3g - 3$ équations :

$$\sum_{k\varepsilon} \Gamma_0{}^{jk}_{\alpha\varepsilon} (\lambda^k_\varepsilon - \lambda^{n\varepsilon}) = - v \sum_{\beta\delta} \mathcal{L}^{j\delta}_{\alpha\beta} t^{\beta}_{\delta}$$

$$j, k = 1, 2, \ldots n-1, n+1, \ldots g; \varepsilon, \alpha, \beta, \delta = 1, 2, 3.$$

Et $\underset{n}{G}$ étant la matrice réciproque de la matrice $\underset{n}{\Gamma_0}$ (déduite de la matrice Γ_0 par suppression des 3 lignes et des 3 colonnes n, ε), nous avons :

$$\lambda^{k\varepsilon} - \lambda^{n\varepsilon} = - v \sum_{j\beta\delta} \Big(\sum_{j\zeta} \underset{n}{G}{}^{\varepsilon\zeta}_{kj} \mathcal{L}^{j\delta}_{\zeta\beta} \Big) t^{\beta}_{\delta} ; \quad \zeta = 1, 2, 3. \quad (6)$$

Les déplacements relatifs $\lambda^{k\varepsilon} - \lambda^{n\varepsilon}$, des réseaux formés par les différents atomes du motif cristallin, correspondent à la propagation non uniforme des ondes élastiques à travers le motif.

II. Tensions déduites de la densité d'énergie prise par une déformation linéaire.

— L'énergie dépensée pour produire une déformation statique s'emmagasine dans le milieu cristallin. Si la déformation est linéaire, elle prend (par unité de volume) une densité uniforme, laquelle s'exprime d'après (37, I) et (1)

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{4v} \sum_{\substack{p\\jk}} \sum_{\alpha\beta} C^{m-p}_{\substack{j\ k\\ \alpha\ \beta}} [\lambda^{j\alpha} - \lambda^{k\alpha} + \sum_{\gamma} t^{\alpha}_{\gamma}(m^{\gamma} + j^{\gamma} - p^{\gamma} - k^{\gamma})]$$
$$\times [\lambda^{j\beta} - \lambda^{k\beta} + \sum_{\delta} t^{\beta}_{\delta}(m^{\delta} + j^{\delta} - p^{\delta} - k^{\delta})] \quad (7)$$
$$\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2, 3$$

v est le volume de la maille élémentaire (avant la déformation).

Prenons en compte les coefficients $\Gamma_0{}^{jk}_{\alpha\beta}$ (22, II), $\mathcal{L}^{j\delta}_{\alpha\beta}$ (30, II) et $\mathcal{M}_2{}^{\gamma\delta}_{\alpha\beta}$ (36, II) ; nous trouvons :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2v} \sum_{jk} \sum_{\alpha\beta} \Gamma_0{}^{jk}_{\alpha\beta} \lambda^{j\alpha} \lambda^{k\beta} + \sum_{j} \sum_{\alpha\beta\delta} \mathcal{L}^{j\delta}_{\alpha\beta} \lambda^{j\alpha} t^{\beta}_{\delta}$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \mathcal{M}_2{}^{\gamma\delta}_{\alpha\beta} t^{\alpha}_{\gamma} t^{\beta}_{\delta}.$$

L'égalité (4) donne

$$\frac{1}{2v} \sum_{jk} \sum_{\alpha\beta} \Gamma_0{}^{jk}_{\alpha\beta} \lambda^{j\alpha} \lambda^{k\beta} = -\frac{1}{2} \sum_{j} \sum_{\alpha\beta\delta} \mathcal{L}^{j\delta}_{\alpha\beta} \lambda^{j\alpha} t^{\beta}_{\delta}$$

donc

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \sum_{j} \sum_{\alpha\beta\delta} \mathcal{L}^{j\delta}_{\alpha\beta} \lambda^{j\alpha} t^{\beta}_{\delta} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \mathcal{M}_2{}^{\gamma\delta}_{\alpha\beta} t^{\alpha}_{\gamma} t^{\beta}_{\delta}.$$

Et il vient de (5), (6) et (34, II)

$$\sum_{j} \sum_{\alpha\beta\delta} \mathcal{L}^{j\delta}_{\alpha\beta} \lambda^{j\alpha} t^{\beta}_{\delta} = \sum_{k} \sum_{\alpha\beta\gamma} \mathcal{L}^{k\gamma}_{\beta\alpha} \lambda^{k\beta} t^{\alpha}_{\gamma}$$
$$= \sum_{k} \sum_{\alpha\varepsilon\gamma} \mathcal{L}^{k\gamma}_{\varepsilon\alpha} (\lambda^{k\varepsilon} - \lambda^{n\varepsilon}) t^{\alpha}_{\gamma} \qquad (n \text{ constant})$$
$$= \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \mathcal{M}_1{}^{\gamma\delta}_{\alpha\beta} t^{\alpha}_{\gamma} t^{\beta}_{\delta}.$$

Enfin nous obtenons, compte tenu de (38, II)

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \mathcal{N}^{\gamma\delta}_{\alpha\beta} t^{\alpha}_{\gamma} t^{\beta}_{\delta}. \quad (8)$$

Soit T^{γ}_{α} la tension exercée dans les plans normaux à l'axe de coordonnées $\overrightarrow{Ox^{\gamma}}$, et dirigée suivant l'axe de coordonnées $\overrightarrow{Ox^{\alpha}}$. Selon l'élasticité classique, nous avons :

$$T^{\gamma}_{\alpha} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t^{\alpha}_{\gamma}} = \sum_{\beta\delta} \mathcal{N}^{\gamma\delta}_{\alpha\beta} t^{\beta}_{\delta}. \quad (9)$$

Ainsi, les coefficients $\mathcal{N}^{\gamma\delta}_{\alpha\beta}$ (38, II) se rapportent aux déformations linéaires. Ce sont des coefficients d'élasticité statique. Leur second composante a pour expression explicite, compte tenu de (20, I)

$$\mathcal{M}_2{}^{\gamma\delta}_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2v} \Big[\Big(\sum_{\substack{a\\jk}} C_2{}^{\substack{a\\ j\,k}}_{\alpha\beta} + \sum_{\substack{ab\\jkl}} \mathcal{C}^{\substack{a,b\\ jk\,kl}}_{\alpha\beta} + \ldots \Big)$$
$$(a^{\gamma} + j^{\gamma} - k^{\gamma}) (a^{\delta} + j^{\delta} - k^{\delta})$$
$$+ \sum_{\substack{ab\\jkl}} \Big(\mathcal{C}^{\substack{a,\ b\\ jk\ kl}}_{\alpha\ \beta} + \mathcal{C}^{\substack{a,\ b\\ jk\ kl}}_{\beta\ \alpha} \Big) (a^{\gamma} + j^{\gamma} - k^{\gamma}) (b^{\delta} + k^{\delta} - l^{\delta})$$
$$+ \ldots \Big]$$

$$\boldsymbol{a = m - p \,;\, b = p - q \,;\, a + j - k \neq b + k - l.}$$

Deux parties du cristal exercent l'une sur l'autre des tensions opposées qui ont la même intensité, sinon le milieu cristallin ne serait pas en équilibre. Nous devons vérifier que les tensions T^{γ}_{α} déduites de l'énergie prise par la déformation (7 ; 8) remplissent bien cette condition. A cette fin, il convient de donner d'abord une nouvelle expression des coefficients d'élasticité $\mathcal{N}^{\gamma\delta}_{\alpha\beta}$:

III. Nouvelle expression des coefficients d'élasticité.

— Posons :

$$\mathcal{L}'^{j\delta}_{\alpha\beta} = \frac{1}{v} \sum_{ak} C^{\substack{a\\ jk}}_{\alpha\beta} a^{\gamma} ; \quad \boldsymbol{a = m - p} ; \quad (10)$$

$$\mathcal{M}'_1{}^{\gamma\delta}_{\alpha\beta} = v \sum_{jk\varepsilon\zeta} \mathcal{L}'^{k\gamma}_{\varepsilon\alpha} \underset{n}{G}{}^{\varepsilon\zeta}_{kj} \mathcal{L}'^{j\delta}_{\zeta\beta} ; \quad \varepsilon, \zeta = 1, 2, 3 ; \quad (11)$$

$$\mathcal{M}'_2{}^{\gamma\delta}_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2v} \sum_{ajk} C^{\substack{a\\ jk}}_{\alpha\beta} a^{\gamma} a^{\delta}. \quad (12)$$

Il vient de (30, II) et (22, II)

$$\mathcal{L}^{j\delta}_{\alpha\beta} = \mathcal{L}'^{j\delta}_{\alpha\beta} + \frac{1}{v} \sum_{k} \Gamma_0{}^{jk}_{\alpha\beta} k^{\delta}.$$

Et, compte tenu des relations :

$$\left.\begin{aligned} \sum_{j\zeta} \underset{n}{G}{}^{\varepsilon\zeta}_{kj}\, \Gamma_0{}^{jk'}_{\zeta\beta} &= \delta_{kk'}\, \delta_{\varepsilon\beta} \\ \sum_{k\varepsilon} \Gamma_0{}^{kj'}_{\varepsilon\alpha}\, \underset{n}{G}{}^{\varepsilon\zeta}_{kj} &= \delta_{jj'}\, \delta_{\alpha\zeta} \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

nous obtenons :

$$\mathcal{M}_1{}^{\gamma\delta}_{\alpha\beta} = \mathcal{M}'_1{}^{\gamma\delta}_{\alpha\beta} - \sum_k \mathcal{L}'{}^{k\gamma}_{\alpha\beta}\, k^\delta - \sum_j \mathcal{L}'{}^{j\delta}_{\alpha\beta}\, j^\gamma - \frac{1}{v} \sum_{jk} \Gamma_0{}^{jk}_{\alpha\beta}\, j^\gamma\, k^\delta.$$

D'autre part :

$$\mathcal{M}_2{}^{\gamma\delta}_{\alpha\beta} = \mathcal{M}'_2{}^{\gamma\delta}_{\alpha\beta} + \sum_k \mathcal{L}'{}^{k\gamma}_{\alpha\beta}\, k^\delta + \sum_j \mathcal{L}'{}^{j\delta}_{\alpha\beta}\, j^\gamma + \frac{1}{v} \sum_{jk} \Gamma_0{}^{jk}_{\alpha\beta}\, j^\gamma\, k^\delta.$$

Donc :

$$\mathcal{M}'_1{}^{\gamma\delta}_{\alpha\beta} + \mathcal{M}'_2{}^{\gamma\delta}_{\alpha\beta} = \mathcal{M}_1{}^{\gamma\delta}_{\alpha\beta} + \mathcal{M}_2{}^{\gamma\delta}_{\alpha\beta}.$$

Et les coefficients d'élasticité $\mathcal{N}^{\gamma\delta}_{\alpha\beta}$ s'expriment encore :

$$\mathcal{N}^{\gamma\delta}_{\alpha\beta} = \mathcal{M}'_1{}^{\gamma\delta}_{\alpha\beta} + \mathcal{M}'_2{}^{\gamma\delta}_{\alpha\beta}. \qquad (14)$$

IV. **Calcul direct des tensions.** — Prenons un système de référence orthonormé (lié à l'édifice cristallin libre de toute contrainte), l'origine O dans un plan perpendiculaire P de grande densité, l'axe de coordonnées $\overrightarrow{Ox^\gamma}$ normal au même plan, et adoptons une maille élémentaire, a b c d, ayant sa base parallèle au plan P, lequel divise le cristal en deux parties, A et B, que nous supposerons sensiblement égales. Le cristal ayant maintenant subi une déformation linéaire, nous nous proposons d'évaluer la tension $T^\gamma_{\alpha,\mathrm{AB}}$ exercée dans le plan P, par le demi-cristal A sur le demi-cristal B ($\alpha, \gamma = 1, 2, 3$).

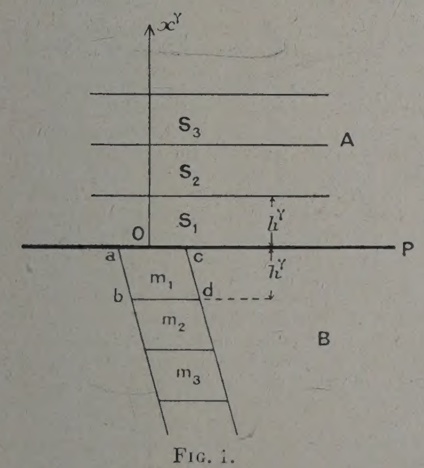


Fig. 1.

Sommons les forces de rappel exercées, suivant $\overrightarrow{Ox^\alpha}$, sur tous les atomes du motif cristallin m_1 contenu dans une maille a b c d, au-dessous du plan P, par les atomes de la strate S_1 au-dessus du même plan, puis par ceux de la strate S_2, ensuite par ceux de la strate S_3, etc... Toutes ces forces ont pour résultante la force de rappel exercée suivant $\overrightarrow{Ox^\alpha}$, par le demi-cristal A sur le motif m_1. Évaluons de même les forces de rappel exercées dans la même direction et le même sens, par toutes les strates S_1, S_2, ..., de la partie A sur les motifs m_2, m_3, ... qui forment une demi-rangée cristalline contenue dans la partie B, en remarquant que la force de rappel exercée par la strate S_n sur le motif m_p est égale à celle qui est exercée par la strate S_{n+p-1} sur le motif m_1. Sommons enfin les forces de rappel exercées, suivant $\overrightarrow{Ox^\alpha}$, par le demi-cristal A sur tous les motifs de la demi-rangée m_1, m_2, m_3, ... Si R_α est la résultante de ces forces, et si la maille adoptée a pour base s et pour hauteur h^γ (avant la déformation), nous trouvons :

$$T^\gamma_{\alpha,\mathrm{AB}} = \frac{R_\alpha}{s} = \frac{R_\alpha}{v} h^\gamma\,; \qquad v = sh^\gamma$$

$$= -\frac{1}{v} \sum_{\beta\delta} \left[\sum_{\substack{a\\jk}} \sum_{\varepsilon} C^{\;a}_{jk\,\alpha\varepsilon}\, a^\gamma (\lambda^{j\varepsilon} - \lambda^{k\varepsilon})^\delta_\beta + \sum_{\substack{a\\jk}} C^{\;a}_{jk\,\alpha\beta}\, a^\gamma (a^\delta - j^\delta - k^\delta) \right] t^\beta_\alpha$$

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{m} - \boldsymbol{p}\,; \qquad a^\gamma < 0\,;$$

$$a^\gamma = nh^\gamma\,; \quad n = -1, -2, -3, \ldots \qquad (15)$$

Chaque déformation élémentaire entraîne un déplacement relatif des réseaux formés par les atomes en positions $\boldsymbol{j}$ et $\boldsymbol{k}$ dans le motif cristallin (6) ; $(\boldsymbol{\lambda}^j - \boldsymbol{\lambda}^k)^\delta_\beta\, t^\beta_\delta$ est celui qui est dû à la déformation t^β_δ. Le même calcul donne la tension $T^\gamma_{\alpha,\mathrm{BA}}$, exercée dans le plan P par le demi-cristal B sur le demi-cristal A :

$$T^\gamma_{\alpha,\mathrm{BA}} = \frac{1}{v} \sum_{\beta\delta} \left[\sum_{\substack{a\\jk}} \sum_{\varepsilon} C^{\;a}_{jk\,\alpha\varepsilon}\, a^\gamma (\lambda^{j\varepsilon} - \lambda^{k\varepsilon})^\delta_\beta + \sum_{\substack{a\\jk}} C^{\;a}_{jk\,\alpha\beta}\, a^\gamma (a^\delta + j^\delta - k^\delta) \right] t^\beta_\delta$$

$$a^\gamma > 0\,; \quad a^\gamma = nh^\gamma\,; \quad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (15\ bis)$$

L'équilibre du milieu cristallin déformé exige les égalités :

$$T^\gamma_{\alpha,\mathrm{BA}} = -T^\gamma_{\alpha,\mathrm{AB}}\,; \ \alpha = 1, 2, 3. \qquad (16)$$

Les composantes t^β_δ de la déformation étant indépendantes, ces égalités impliquent les vingt-sept relations :

$$\sum_{\substack{a\\jk\\a^\gamma<0}} C^{\;a}_{jk\,\alpha\varepsilon}\, a^\gamma (\lambda^{j\varepsilon} - \lambda^{k\varepsilon})^\delta_\beta + \sum_{\substack{a\\jk\\a^\gamma<0}} C^{\;a}_{jk\,\alpha\beta}\, a^\gamma (a^\delta + j^\delta - k^\delta)$$

$$= \sum_{\substack{a\\jk\\a^\gamma>0}} C^{\;a}_{jk\,\alpha\varepsilon}\, a^\gamma (\lambda^{j\varepsilon} - \lambda^{k\varepsilon})^\delta_\beta + \sum_{\substack{a\\jk\\a^\gamma>0}} C^{\;a}_{jk\,\alpha\beta}\, a^\gamma (a^\delta + j^\delta - k^\delta)$$

$$\alpha, \beta, \delta = 1, 2, 3.$$

qui ont encore pour expression, compte tenu de (12, I)

$$\sum_{\substack{a\\jk\\a^\gamma > 0}} \sum_{\varepsilon} \left(C^{\;a}_{\substack{jk\\\alpha\varepsilon}} - C^{\;a}_{\substack{jk\\\varepsilon\alpha}} \right) a^\gamma (\lambda^{j\varepsilon} - k^\varepsilon)^\delta_\beta$$

$$+ \sum_{\substack{a\\jk\\a^\gamma > 0}} \left(C^{\;a}_{\substack{jk\\\alpha\beta}} - C^{\;a}_{\substack{jk\\\beta\alpha}} \right) a^\gamma (a^\delta + j^\delta - k^\delta) = 0 \quad (17)$$

$$a^\gamma = n h^\gamma \; ; \qquad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Nous avons posé les constantes de rappel symétriques par rapport à leurs indices α et β. En conséquence, les conditions d'équilibre (17) se traduisent par des identités, et les tensions s'expriment, compte tenu de (15) et de (15 *bis*) :

$$T^\gamma_{\alpha,\mathrm{AB}} = -\frac{1}{2v} \sum_{\substack{a\\jk}} \sum_{\varepsilon} C^{\;a}_{\substack{jk\\\alpha\varepsilon}} a^\gamma (\lambda^{j\varepsilon} - \lambda^{k\varepsilon})$$

$$+ \sum_{\substack{a\\jk}} \sum_{\beta\delta} C^{\;a}_{\substack{jk\\\alpha\beta}} a^\gamma t^\beta_\delta (a^\delta - j^\delta - k^\delta) \quad (18)$$

$$a^\gamma = n h^\gamma \; ; \quad n = \ldots ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \ldots$$

$$\lambda^{j\varepsilon} - \lambda^{k\varepsilon} = \sum_{\beta\delta} (\lambda^{j\varepsilon} - \lambda^{k\varepsilon})^\delta_\beta t^\beta_\delta.$$

Prenons en compte les coefficients $\mathcal{L}'^{k\gamma}_{\varepsilon\alpha}$ (10) et $\mathfrak{M}'^{\gamma\delta}_{2\,\alpha\beta}$ (12) ; nous obtenons :

$$T^\gamma_{\alpha,\mathrm{AB}} = \sum_{k\varepsilon} \mathcal{L}'^{k\gamma}_{\varepsilon\alpha} \lambda^{k\varepsilon} + \sum_{\beta\delta} \Big(\mathfrak{M}'^{\gamma\delta}_{2\,\alpha\beta} + \sum_k \mathcal{L}'^{k\gamma}_{\alpha\beta} k^\delta\Big) t^\beta_\delta.$$

D'autre part, la relation (38 *bis*, I) donne

$$\sum_k \mathcal{L}'^{k\gamma}_{\varepsilon\alpha} = 0$$

donc :

$$\sum_{k\varepsilon} \mathcal{L}'^{k\gamma}_{\varepsilon\alpha} \lambda^{k\varepsilon} = \sum_{k\varepsilon} \mathcal{L}'^{k\gamma}_{\varepsilon\alpha} (\lambda^{k\varepsilon} - \lambda^{n\varepsilon}) \quad (n \text{ constant})$$

et, compte tenu de (6), (11), (13) :

$$\sum_{k\varepsilon} \mathcal{L}'^{k\gamma}_{\varepsilon\alpha} \lambda^{k\varepsilon} = \sum_{\beta\delta} \Big(\mathfrak{M}'^{\gamma\delta}_{1\,\alpha\beta} - \sum_k \mathcal{L}'^{k\gamma}_{\alpha\beta} k^\delta\Big) t^\beta_\delta.$$

D'où il vient :

$$T^\gamma_{\alpha,\mathrm{AB}} = \sum_{\beta\delta} (\mathfrak{M}'^{\gamma\delta}_{1\,\alpha\beta} + \mathfrak{M}'^{\gamma\delta}_{2\,\alpha\beta}) t^\beta_\delta = \sum_{\beta\delta} \mathfrak{N}^{\gamma\delta}_{\alpha\beta} t^\beta_\delta$$

Nous retrouvons les tensions (9) déduites de l'énergie prise par la déformation linéaire. Rapportée aux constantes de rappel symétriques en α et β, cette énergie comporte l'égalité (16) des tensions opposées.

Prenons, au contraire, les constantes de rappel dissymétriques par rapport à leurs indices α et β. Les conditions d'équilibre (17) ne sont plus des identités.

1° Chacune d'elles définit une relation entre les constantes de rappel et les translations du milieu cristallin. Et cette relation est fort complexe. Elle ne peut être admise sans démonstration, encore moins sans vérification.

2° L'égalité (16) des tensions opposées est satisfaite dans tous les plans réticulaires, donc pour chaque mode de stratification. En conséquence, les relations (17) sont en nombre très grand. Et leur compatibilité n'est pas prouvée.

Supposons, néanmoins, toutes les égalités (17) satisfaites sans restriction, ni conditions supplémentaires. Les tensions sont encore données par la formule (18). Elles ont pour expression :

$$T^\gamma_\alpha = \sum_{\beta\delta} \mathfrak{N}'^{\gamma\delta}_{\alpha\beta} t^\beta_\delta \qquad (18\ bis)$$

$$\mathfrak{N}'^{\gamma\delta}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} M^{\gamma\delta}_{1\,\alpha\beta} + \frac{1}{2} \mathfrak{M}'^{\gamma\delta}_{1\,\alpha\beta} + \mathfrak{M}'^{\gamma\delta}_{2\,\alpha\beta}$$

$$M^{\gamma\delta}_{1\,\alpha\beta} = -v \sum_{jk\varepsilon\zeta} \mathcal{L}'^{k\gamma}_{\alpha\varepsilon} \underset{n}{G^{\varepsilon\zeta}_{kj}} \mathcal{L}'^{j\delta}_{\zeta\beta}.$$

Les constantes de rappel étant posées dissymétriques en α et β, $\mathcal{L}'^{k\gamma}_{\alpha\varepsilon}$ diffère de $\mathcal{L}'^{k\gamma}_{\varepsilon\alpha}$ (10). Donc les coefficients élémentaires $M^{\gamma\delta}_{1\,\alpha\beta}$, et par conséquent les coefficients d'élasticité statique $\mathfrak{N}'^{\gamma\delta}_{\alpha\beta}$, sont dénués de toute symétrie tensorielle. Cela est inadmissible.

L'énergie nécessaire pour produire une déformation donnée est constante. Lorsque les déformations élémentaires t^β_δ sont produites l'une après l'autre, cette énergie ne varie pas avec leur ordre de succession. Au contraire, si les coefficients d'élasticité statique étaient sans symétrie tensorielle — s'ils prenaient pour un cristal triclinique quatre-vingt-une valeurs distinctes — l'énergie prise par la déformation varierait avec l'ordre dans lequel se succèdent les déformations élémentaires. C'est un résultat aberrant [2].

[2] Rapportée à des constantes de rappel dissymétriques en α et β, l'énergie de déformation (36-I),

$$E = \frac{1}{2} \sum_{mp} \sum_{jk} \sum_{\alpha\beta} C^{\;m\,-\,p}_{\substack{j\;\;k\\\alpha\;\;\beta}} \Big[\lambda^{j\alpha} + \sum_\gamma t^\alpha_\gamma (m^\gamma + j^\gamma)\Big]\Big[\lambda^{k\beta} + \sum_\delta t^\beta_\delta (p^\delta + k^\delta)\Big],$$

reste néanmoins symétrique en $\alpha\gamma$ et $\beta\delta$. Si l'on exprime cette énergie en fonction des déformations élémentaires t^β_δ (§ II), les coefficients d'élasticité que l'on obtient sont donc aussi symétriques en $\alpha\gamma$ et $\beta\delta$. C'est un résultat en désaccord avec celui que nous avons trouvé par le calcul direct des tensions (§ IV, formule 18 *bis*). Mais le désaccord disparaît si les constantes de rappel deviennent symétriques en α et β. Il est donc dû à l'absence de cette symétrie. D'autre part, les conditions (17) sont exigées par l'équilibre du milieu cristallin en état de déformation linéaire. Donc les constantes de rappel dissymétriques en α et β peuvent seulement être admises si elles satisfont les conditions (17). Car si elles ne répondent pas à ces conditions, l'énergie de déformation qui leur est rapportée ne comporte plus l'égalité des tensions opposées (16) ; et les coefficients d'élasticité déduits de cette énergie ne sont pas les coefficients d'élasticité véritables : ils ne se rapportent pas au milieu cristallin en équilibre. Or, il n'est point démontré que les constantes de rappel dissymétriques en α et β sont conformes aux conditions (17). Au contraire, en adoptant cette hypothèse, on aboutit, par le calcul direct des tensions, à une conclusion aberrante ; et, c'est encore la même hypothèse qui entraîne probablement le désaccord que nous venons de reconnaître. Car, si cette hypothèse est fausse, les constantes de rappel sont nécessairement symétriques en α et β. Et, cette condition remplie, les coefficients d'élasticité déduits de l'énergie de déformation se confondent bien avec les coefficients d'élasticité obtenus par le calcul direct des tensions.

Ainsi, sans pouvoir démontrer formellement que les constantes de rappel $C^{m-p}_{\substack{i\ k\\ \alpha\ \beta}}$ sont symétriques en α et β, nous avons de fortes raisons de les tenir pour telles.

V. Coefficients d'élasticité dynamique et coefficients d'élasticité statique. — Le déplacement d'un atome qui oscille est contrevariant, et la force de rappel développée par l'oscillation est covariante. En conséquence, les coefficients d'élasticité dynamique $\mathcal{D}^{\gamma\delta}_{\alpha\beta}$ (39, II) forment une densité tensorielle mixte, covariante en α et β, contrevariante en γ et δ. Pour évaluer les tensions produites par une déformation linéaire, j'ai encore pris les forces de rappel covariantes et les coefficients d'élasticité statique ainsi définis, $\mathcal{N}^{\gamma\delta}_{\alpha\beta}$ (8 ; 18), sont aussi covariants en α et β et contrevariants en γ et δ. Mais les déformations statiques développent des couples, lesquels se rapportent à des forces contrevariantes. De sorte qu'en élasticité statique il est nécessaire de poser les tensions contrevariantes ($T^{\alpha\gamma}$), les déformations covariantes ($t_{\beta\delta}$) et les coefficients d'élasticité statique, homogènes à ces grandeurs, $\mathcal{N}^{\alpha\gamma,\beta\delta}$, sont contrevariants comme les coefficients de Voigt.

La symétrie tensorielle est invariable. La nouvelle densité tensorielle ($\mathcal{N}^{\alpha\gamma,\beta\delta}$) reste, comme l'ancienne ($\mathcal{N}^{\gamma\delta}_{\alpha\beta}$), symétrique seulement en $\alpha\gamma$ et $\beta\delta$. Mais la relation (39, II) entre les coefficients d'élasticité dynamique et les coefficients d'élasticité statique se trouve modifiée :

$$\mathcal{D}^{\gamma\delta}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu} g_{\alpha\mu}\, g_{\gamma\nu} (\mathcal{N}^{\mu\gamma,\nu\delta} + \mathcal{N}^{\mu\delta,\nu\gamma}). \tag{19}$$

Ainsi, nous ne retrouvons pas non plus les coefficients de Voigt en élasticité statique. Bien plus, nous obtenons des coefficients d'élasticité de deux sortes : les coefficients $\mathcal{D}^{\gamma\delta}_{\alpha\beta}$, propres aux déformations cinétiques, les coefficients $\mathcal{N}^{\alpha\gamma,\beta\delta}$, propres aux déformations linéaires, et les uns sont irréductibles aux autres, car ils n'ont pas la même symétrie tensorielle. Cette différenciation était prévisible. Les déformations cinétiques se rapportent aux positions instantanées des atomes. Ce sont des déformations oscillantes. A température constante, elles ne déplacent pas les positions moyennes des atomes, elles ne modifient pas le réseau cristallin. Au contraire, les déformations statiques transforment ce réseau. Les déformations cinétiques et statiques sont donc essentiellement différentes ; elles ne peuvent être rapportées aux mêmes coefficients d'élasticité.

La symétrie des coefficients d'élasticité statique $\mathcal{N}^{\alpha\gamma,\beta\delta}$ est moins élevée que celle des coefficients de Voigt. Et la structure réticulaire n'implique nulle relation entre les neuf déformations $t_{\beta\delta}$ (38, I ; 4 ; 5). Cela suggère que des efforts mécaniques, seuls, sans l'intervention d'un champ électrique ou magnétique, peuvent produire des déformations telles que chaque élément cristallin est soumis à un couple proportionnel à son volume. Ces déformations, à couple spécifique uniforme, ont été définies et réalisées par Y. Le Corre ([3]) (1954) [4], qui a de plus édifié une nouvelle théorie de la piézoélectricité excluant l'hypothèse des forces de cohésion centrales. Je traiterai donc seulement des déformations classiques, écartant le cas des cristaux piézoélectriques étudié par Y. Le Corre.

VI. Les déformations classiques. — Les théoriciens de l'élasticité classique posent le tenseur des déformations symétriques ($t_{\delta\beta} = t_{\beta\delta}$), et ils trouvent que le milieu cristallin est en équilibre (c'est-à-dire que le couple exercé sur chaque élément est nul) lorsque les tensions sont elles-mêmes symétriques :

$$T^{\gamma\alpha} = T^{\alpha\gamma}. \tag{20}$$

Rapportons les tensions aux coefficients d'élasticité « atomiques » $\mathcal{N}^{\alpha\gamma,\beta\delta}$. Les conditions d'équilibre (20) se traduisent par 3 relations linéaires entre les neuf composantes $t_{\beta\delta}$ de la déformation :

$$\sum_{\beta\delta} (\mathcal{N}^{\alpha\gamma,\beta\delta} - \mathcal{N}^{\gamma\alpha,\beta\delta})\, t_{\beta\delta} = 0. \tag{21}$$

Ces 3 relations déterminent 3 déformations $t_{\beta\delta}$ en fonction des 6 autres.

Posons :

$$\tau_{\beta\delta} = \frac{1}{2}(t_{\beta\delta} + t_{\delta\beta}) \; ; \qquad \varpi_{\beta\delta} = \tau_{\beta\delta} - t_{\beta\delta} \tag{22}$$

et désignons par $\varepsilon_{\beta\delta}$ les 3 rotations ϖ_{23}, ϖ_{31}, ϖ_{12}. Les conditions d'équilibre (20 ; 21) deviennent :

$$\sum_{\beta\delta=23,31,12} [(\mathcal{N}^{\alpha\gamma,\beta\delta} - \mathcal{N}^{\gamma\alpha,\beta\delta}) - (\mathcal{N}^{\alpha\gamma,\delta\beta} - \mathcal{N}^{\gamma\alpha,\delta\beta})]\, \varepsilon_{\beta\delta} = \sum_{\beta\delta} (\mathcal{N}^{\alpha\gamma,\beta\delta} - \mathcal{N}^{\gamma\alpha,\beta\delta})\, \tau_{\beta\delta}. \tag{21 bis}$$

D'où l'on déduit les 3 rotations $\varepsilon_{\beta\delta}$ en fonction des 6 composantes indépendantes du tenseur ($\tau_{\beta\delta}$). La déformation est irrotationnelle ($\varepsilon_{23} = \varepsilon_{31} = \varepsilon_{12} = 0$),

si $$\sum_{\beta\delta} (\mathcal{N}^{\alpha\gamma,\beta\delta} - \mathcal{N}^{\gamma\alpha,\beta\delta})\, \tau_{\beta\delta} = 0.$$

Ces 3 conditions déterminent 3 déformations $\tau_{\beta\delta}$ en fonction des 3 restantes, et par conséquent trois tensions indépendantes $T^{\alpha\gamma}$ en fonction des 3 autres. Ainsi, les tensions symétriques qu'il faut appliquer sur un cristal triclinique pour produire une déformation irrotationnelle sont liées par 3 relations linéaires. Quand la symétrie du milieu cristallin s'élève, le nombre de ces relations diminue (avec celui des différences $\mathcal{N}^{\alpha\gamma,\beta\delta} - \mathcal{N}^{\gamma\alpha,\beta\delta}$). Il tombe à zéro pour les cristaux cubiques holoèdres : une déformation linéaire de ces cristaux, produite par des tensions symétriques, est donc toujours irrotationnelle.

([3]) Viswanathan [5], et Raman et Viswanathan [6] ont repris le même sujet.

L'énergie emmagasiné dans le milieu cristallin au cours d'une déformation linéaire prend une densité (8 ; 22)

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \mathfrak{N}^{\alpha\gamma.\beta\delta}(\tau_{\alpha\gamma} - \varpi_{\alpha\gamma})(\tau_{\beta\delta} - \varpi_{\beta\delta}).$$

Contrairement aux conclusions de l'élasticité classique nous trouvons que cette énergie varie avec les rotations $\varepsilon_{\beta\delta}$ ($\varepsilon_{\beta\delta} = \varpi_{\beta\delta} = - \varpi_{\delta\beta}$). En outre, nous avons :

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \varepsilon_{\alpha\gamma}} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \varpi_{\alpha\gamma}} - \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \varpi_{\gamma\alpha}} = - \sum_{\beta\delta} (\mathfrak{N}^{\alpha\gamma.\beta\delta} - \mathfrak{N}^{\gamma\alpha.\beta\delta})\, t_{\beta\delta}.$$

Cette dérivée est nulle quand les déformations satisfont les égalités (21). Ainsi, *les conditions de l'équilibre classique* (20) *sont remplies lorsque l'énergie de la déformation est stationnaire par rapport aux rotations* $\varepsilon_{\alpha\gamma}$.

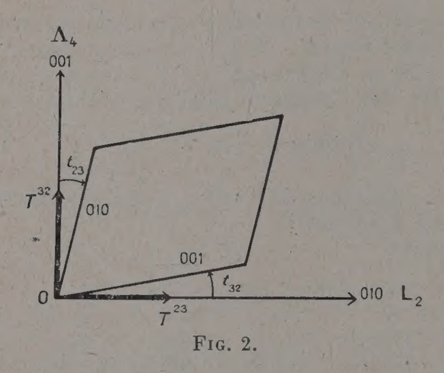


Fig. 2.

Rapportons les coefficients d'élasticité d'un cristal quadratique, holoèdre, au système de référence adopté en cristallographie : les axes de coordonnées $\overrightarrow{Ox^1}$, $\overrightarrow{Ox^2}$ dirigés suivant les axes de symétrie binaire, l'axe $\overrightarrow{Ox^3}$ suivant l'axe de symétrie quaternaire. Envisageons maintenant le cristal soumis à deux tensions T^{23}, T^{32}, de même intensité et de *directions constantes*, celles des axes de coordonnées $\overrightarrow{Ox^2}$ et $\overrightarrow{Ox^3}$. Ces deux tensions qui satisfont aux conditions de l'équilibre classique (20) produisent deux déformations seulement : t_{23} et t_{32}, et les coefficients d'élasticité $\mathfrak{N}^{32.23}$ et $\mathfrak{N}^{23.32}$ étant égaux,

$$t_{23} = T^{23} \frac{\mathfrak{N}^{32.32} - \mathfrak{N}^{23.32}}{\Delta_{23}};$$

$$t_{32} = T^{23} \frac{\mathfrak{N}^{23.23} - \mathfrak{N}^{23.32}}{\Delta_{23}};$$

$$\Delta_{23} = \mathfrak{N}^{23.23}\, \mathfrak{N}^{32.32} - (\mathfrak{N}^{23.32})^2;$$

$$\frac{t_{32}}{t_{23}} = \frac{\mathfrak{N}^{23.23} - \mathfrak{N}^{23.32}}{\mathfrak{N}^{32.32} - \mathfrak{N}^{23.32}}.$$

Nous trouvons qu'une fois la déformation accomplie les plans réticulaires 010, 001, font avec les *tensions appliquées* T^{23}, T^{32}, des angles déterminés, respectivement égaux à t_{32} et t_{23} (en confondant leur mesure avec leur tangente).

Selon l'élasticité classique, seule est définie la déformation symétrique $\tau_{23} = \frac{1}{2}(t_{23} + t_{32})$:

$$2\tau_{23} = T^{23}/c^{23.23}; \qquad (c^{23.23} = c^{44}).$$

Les angles formés par les plans réticulaires 010, 001 du cristal déformé avec les *tensions appliquées* restent indéterminés : ils peuvent osciller entre zéro et $2\tau_{23}$. D'où vient ce désaccord ?

C'est que la théorie classique des déformations linéaires se rapporte aussi à un champ de forces centrales. Et Max Born le démontre encore [7]. Il suppose les atomes unis par des forces centrales, et prend bien en compte les déformations $t_{\beta\delta}$. Mais il trouve les rapports

$$t_{\delta\beta}/t_{\beta\delta} \qquad (\beta \neq \delta)$$

indéterminés. Seules restent définies les déformations symétriques $\tau_{\beta\delta}$ ($\beta \neq \delta$) (22). En outre, les énergies (7, 8) et les tensions (9) qu'il évalue ne varient nullement avec les rotations $\varpi_{\beta\delta}$ (22).

Dans quelques cas simples, les déformations $t_{\beta\delta}$ ($\beta \neq \delta$) sont mesurables. Mais généralement cette opération est, sinon impossible, tout au moins difficilement praticable. Car, en général, il est difficile de matérialiser le système de référence lié au milieu cristallin sous nulle contrainte, c'est-à-dire : de repérer exactement l'orientation des faces du cristal avant la déformation, pour les comparer avec l'orientation atteinte à la fin de la déformation.

On objectera que les déformations $t_{\beta\delta}$ ($\beta \neq \delta$) échappent non seulement aux mesures mais aussi à toute définition et qu'elles sont donc fictives. C'est rompre avec la géométrie tensorielle. Dans le milieu cristallin les repères sont multiples : rangées, plans réticulaires, positions moyennes des atomes. Les composantes de rappel, $C^{m-p}_{\substack{i\ k\\ \alpha\ \beta}}$, se rapportent, par définition, à ces repères dans le milieu libre de toute contrainte. C'est donc aux mêmes repères que doivent être rapportés les déplacements u^m_γ accomplis par les atomes et, par conséquent, les déformations (1). Que la mesure des déformations $t_{\beta\delta}$ ($\beta \neq \delta$) soit délicate ne change rien à cela. D'ailleurs, si l'on considère uniquement les déformations classiques, c'est-à-dire : les déformations à couple spécifique nul (20), les rotations $\varpi_{\beta\delta}$ (22) sont déterminées par les 6 déformations symétriques $\tau_{\beta\delta}$ (22). Donc, seules restent en compte 6 déformations et 6 tensions indépendantes ; nous retombons sur les données de l'élasticité classique. Dans ces conditions, nous pouvons aussi définir des coefficients d'élasticité $c^{\alpha\gamma.\beta\delta}$ qui se rapportent aux déformations symétriques $\tau_{\beta\delta}$ et qui ont donc la même symétrie que les coefficients

de Voigt (Le Corre, 1954) [4], et se confondent avec les coefficients de Voigt dans l'expression

$$T^{\alpha\gamma} = \sum_{\beta\delta} c'^{\alpha\gamma,\beta\delta} \tau_{\beta\delta}.$$

Substituons aux deux indices $\alpha\gamma$ ou $\beta\delta$, un seul indice η ou ζ, suivant la loi de correspondance :

$$\begin{array}{llllllllll} \alpha\gamma,\beta\delta = & 11 ; & 22 ; & 33 ; & 23 ; & 31 ; & 12 ; & 32 ; & 13 ; & 21 \\ \eta, \zeta = & 1 ; & 2 ; & 3 ; & 4 ; & 5 ; & 6 ; & 7 ; & 8 ; & 9. \end{array}$$

Les coefficients $\mathcal{N}^{\eta\zeta}$ peuvent être pris pour les éléments d'une matrice $\mathcal{N}$, d'ordre 9×9, laquelle est divisible en 9 sous-matrices $A^{11}\, A^{14} \ldots A^{77}$ d'ordre 3×3 :

$$\mathcal{N} = \begin{bmatrix} A^{11} & A^{14} & A^{17} \\ A^{41} & A^{44} & A^{47} \\ A^{71} & A^{74} & A^{77} \end{bmatrix}.$$

Envisageons de même les déformations prises en compte par Voigt comme les éléments d'une matrice Θ d'ordre 6×1 (colonne) :

$$\Theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} ; \qquad \theta_1 = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} ; \qquad \theta_4 = \begin{bmatrix} 2\tau_4 \\ 2\tau_5 \\ 2\tau_6 \end{bmatrix}.$$

Posons enfin :

$$\Pi = \begin{bmatrix} \varpi_4 \\ \varpi_5 \\ \varpi_6 \end{bmatrix}.$$

Les conditions d'équilibre (21 *bis*) s'expriment :

$$[(A^{44} - A^{74}) - (A^{47} - A^{77})]\, \Pi = \left[A^{41} - A^{71} ; \quad \frac{A^{44} - A^{74} + A^{47} - A^{77}}{2} \right] \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_4 \end{bmatrix}.$$

D'où nous déduisons :

$$\Pi = - B_1\, \theta_1 - B_4\, \theta_4$$
$$B_1 = [(A^{47} - A^{77}) - (A^{44} - A^{74})]^{-1} (A^{41} - A^{71})$$
$$B_4 = \frac{1}{2}\, \mathrm{I} + [(A^{47} - A^{77}) - (A^{44} - A^{74})]^{-1} (A^{44} - A^{74})$$

(I étant la matrice unité d'ordre 3×3).

Les coefficients $c'^{\eta\zeta}$ peuvent aussi être pris pour les éléments d'une matrice C' d'ordre 6×6, divisibles en 4 sous-matrices ($V^{11}, \ldots, V^{44}$) d'ordre 3×3 :

$$C' = \begin{bmatrix} V^{11} & V^{14} \\ V^{41} & V^{44} \end{bmatrix}$$

T étant la matrice, d'ordre 6×1, formée par les 6 tensions $T^1\, T^2, \ldots T^6$, nous avons :

$$T = \begin{bmatrix} A^{11} ; & \dfrac{A^{14} + A^{17}}{2} ; & A^{14} - A^{17} \\ A^{41} ; & \dfrac{A^{44} + A^{47}}{2} ; & A^{44} - A^{47} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ B_1\theta_1 + B_4\theta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V^{11} ; & V^{14} \\ V^{41} ; & V^{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_4 \end{bmatrix}.$$

En conséquence :

$$V^{11} = A^{11} + (A^{17} - A^{14})\, B_1$$
$$V^{14} = \tilde{V}^{41} = \frac{A^{14} + A^{17}}{2} + (A^{14} - A^{17})\, B_4$$
$$= A^{14} + \tilde{B_1}(A^{44} - A^{74})$$
$$V^{44} = \frac{A^{44} + A^{47}}{2} + (A^{44} - A^{47})\, B_4.$$

Ces égalités définissent les coefficients $c'^{\alpha\gamma,\beta\delta}$ en fonction des coefficients $\mathcal{N}^{\alpha\gamma,\beta\delta}$. Mais il est impossible de remonter des coefficients $c'^{\alpha\gamma,\beta\delta}$ aux coefficients primitifs $\mathcal{N}^{\alpha\gamma,\beta\delta}$, même si l'on connaît les coefficients d'élasticité dynamique $\mathcal{D}^{\gamma\delta}_{\alpha\beta}$ (39, II).

VII. **La différenciation des coefficients d'élasticité.** — La théorie classique rapporte toutes les déformations cinétiques et statiques aux mêmes coefficients d'élasticité. Au contraire, nous avons trouvé des coefficients d'élasticité spécialisés : les uns propres aux déformations cinétiques, les autres aux déformations linéaires. C'est le désaccord le plus grave entre les théories classique et atomique. Nous devons en rechercher l'origine.

L'élasticité classique est celle d'un milieu homogène à toute échelle où toute déformation se répète dans tout élément si minuscule soit-il. Quelle que soit la déformation du milieu entier, celle d'un élément de plus en plus petit devient linéaire quand elle devient ponctuelle, c'est-à-dire quand le volume de l'élément s'annule. On définit de la sorte en chaque point du milieu une déformation linéaire ($\tau_{\alpha\delta}$ (22)), et, par cette déformation, des tensions ponctuelles qui se rapportent aux coefficients d'élasticité statique. Si le milieu est sillonné par un train d'ondes élastiques, la déformation linéaire et les tensions ponctuelles varient périodiquement suivant la normale aux plans d'onde. De cette variation, on déduit la force de rappel exercée sur un élément de dimensions sensibles, puis, en appliquant le principe de d'Alembert, on obtient les équations dynamiques des ondes élastiques, celles qui sont définies par la matrice classique A (13, II ; 14, II). Et, déterminées par ce procédé, les équations dynamiques des ondes élastiques renferment bien les coefficients d'élasticité statique.

Mais cela suppose les tensions en un point entièrement déterminées par la déformation au même point ; et cette condition est seulement satisfaite si les forces de rappel qui s'exercent entre deux points matériels du milieu homogène s'annulent à des distances infinitésimales. Sinon les tensions en un point sont fonctions de la déformation alentour, inscrite dans un élément de dimensions sensibles. Si cette déformation étendue est produite par un train d'ondes élastiques, elle n'est plus linéaire n'étant plus ponctuelle. Les tensions et les

forces de rappel qu'elle développe ne relèvent plus des coefficients d'élasticité statique. Ainsi, la théorie classique des ondes élastique exige non seulement l'homogénéité absolue du milieu, elle exige encore que les forces de rappel entre les points matériels deviennent négligeables à des distances infiniment petites, infimes par rapport à la longueur d'onde des oscillations.

Ces deux propriétés n'appartiennent pas au milieu cristallin. Il est hétérogène à l'échelle atomique. Ses déformations ne pénètrent pas dans le corps des atomes, modifiant seulement la densité électronique à leurs confins. Elles consistent essentiellement en un déplacement des atomes les uns par rapport aux autres. Et la force de rappel globale appliquée sur chaque atome a un rayon d'action sensible qui s'étend au moins sur quelques diamètres atomiques. En conséquence, le plus petit élément cristallin où l'on puisse définir une déformation, et des tensions déterminées par cette déformation, renferme des atomes fort nombreux. Si les atomes contenus dans cet élément oscillent, ils sont soumis à des forces de rappel. Donc la déformation de l'édifice atomique contenu dans l'élément n'est pas linéaire. Car si elle était telle, chaque atome de l'élément serait porté par la déformation dans une nouvelle position d'équilibre, il n'oscillerait point. La déformation du milieu cristallin par un train d'ondes élastiques n'est donc nulle part strictement linéaire.

Mais, quand la longueur d'onde des oscillations grandit, la déformation locale qui détermine les tensions locales se rapproche de la déformation linéaire ; et l'écart entre la déformation véritable et la déformation linéaire finit par devenir infiniment petit. De sorte que le procédé suivi par la théorie classique pour établir les équations des ondes élastiques reste applicable aux oscillations acoustiques de basse fréquence. Si la théorie classique conserve en élasticité dynamique les coefficients d'élasticité statique ce n'est donc point par un défaut de méthode, c'est qu'elle se rapporte à un champ de forces centrales. Toute théorie atomique des ondes élastiques, qui fait état d'un tel champ, retombe sur les conclusions de l'élasticité classique (les relations de Cauchy écartées pour la raison donnée plus haut) — Max Born (1923) [7] —. D'autre part, appliquons au milieu cristallin le calcul classique qui donne les équations dynamiques des ondes élastiques, mais en rapportant les tensions exercées par les ondes aux coefficients d'élasticité statique $\mathcal{N}_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}$ (38, II). Nous retombons sur la matrice atomique B (40, II) et sur les coefficients d'élasticité dynamique $\mathcal{D}_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}$ (39, II) (⁴). La différenciation des coefficients d'élasticité est donc due exclusivement au fait que les forces de cohésion entre les atomes du milieu cristallin ne sont pas centrales. C'est l'écart entre les forces de cohésion véritables et les forces centrales qui rend les coefficients d'élasticité statique $\mathcal{N}^{\alpha\gamma,\beta\delta}$ dissymétriques en α et γ, et en β et δ, et qui détermine les différences $\mathcal{D}_{\alpha\beta}^{\gamma\delta} - \mathcal{N}_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}$.

Y. Le Corre (1953) [8] a dressé le tableau des coefficients d'élasticité pour les 32 classes de la symétrie cristalline. Ces coefficients forment deux séries différentes, l'une propre aux déformations statiques, l'autre propre aux déformations cinétiques, si élevée que soit la symétrie du milieu cristallin. Par exemple, les cristaux cubiques holoèdres ont 4 coefficients d'élasticité statique distincts :

$$\mathcal{N}^{11,11}\,; \quad \mathcal{N}^{22,33}\,; \quad \mathcal{N}^{23,23}\,; \quad \mathcal{N}^{23,32}\,;$$

et 3 coefficients d'élasticité dynamique distincts ; en repère orthonormé nous avons :

$$\mathcal{D}_{11}^{11} = \mathcal{N}^{11,11}\,; \; \mathcal{D}_{23}^{23} = \frac{1}{2}\left(\mathcal{N}^{22,33} + \mathcal{N}^{23,32}\right)\,;$$

$$\mathcal{D}_{22}^{33} = \mathcal{N}^{23,23}\,;$$

Il existe une seule exception. Si la position moyenne de chaque atome coïncide avec un centre de symétrie, les coefficients d'élasticité dynamique $\mathcal{D}_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}$ et d'élasticité statique $\mathcal{N}_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}$ se confondent. Les cristaux, doués de cette propriété, tous cubiques holoèdres, sont ceux dont les coefficients d'élasticité satisferaient les relations de Cauchy si les forces de cohésion entre les atomes étaient centrales et prendraient, en ce cas, seulement deux valeurs (c^{11} ; $c^{23} = c^{44}$). L'expérience contredit cette conclusion. Au contraire, nous trouvons, en accord avec les résultats expérimentaux, que ces cristaux ont trois coefficients d'élasticité distincts :

$$\mathcal{N}^{11,11}\,; \quad \mathcal{N}^{22,33}\,; \quad \mathcal{N}^{23,23}\,; \quad (\mathcal{N}^{23,32} = \mathcal{N}^{22,33})$$

et, si le repère est orthonormé,

$$\mathcal{D}_{11}^{11} = \mathcal{N}^{11,11}\,; \quad \mathcal{D}_{23}^{23} = \mathcal{N}^{22,33}\,; \quad \mathcal{D}_{22}^{33} = \mathcal{N}^{23,23}.$$

La théorie classique faisant état d'un milieu homogène ne peut obtenir les relations de Cauchy. En conséquence, elle attribue aussi trois coefficients d'élasticité distincts aux cristaux dont tous les atomes se trouvent, en position moyenne, sur un centre de symétrie :

$$c^{11,11} \;\; (\text{ou } c^{11})\,; \quad c^{22,23} \;\; (\text{ou } c^{23})\,; \quad c^{23,23} \;\; (\text{ou } c^{44}).$$

Mais la théorie classique établit entre les coefficients d'élasticité propres aux mêmes cristaux, des rapports différents de ceux que nous prévoyons, c'est-à-dire :

$$c^{23,32} = c^{23,23}\,; \qquad c^{23,32} \neq c^{22,33}$$

tandis que la théorie atomique donne

$$\mathcal{N}^{23,32} \neq \mathcal{N}^{23,23}\,; \quad \mathcal{N}^{23,32} = \mathcal{N}^{22,33}.$$

(⁴) Car les deux facteurs q^{γ} et q^{δ} peuvent être intervertis.

En conséquence, nous avons, selon la théorie classique :

$$T^{23} = 2c^{23,23}\,\tau_{23}$$

alors que selon la théorie atomique

$$T^{23} = (\mathfrak{N}^{23,23} + \mathfrak{N}^{22,33})\,\tau_{23}.$$

Et la matrice atomique (40, II), des oscillations productibles dans les cristaux considérés, diffère de la matrice classique A (14, II). Donc, même dans le cas le plus simple, lorsque la position moyenne de chaque atome coïncide avec un centre de symétrie, la théorie atomique reste en désaccord avec la théorie classique ([5]).

L'étude expérimentale de l'élasticité cristalline est présentement délaissée. Pourtant les vitesses des ondes élastiques sont données avec une haute précision par la diffraction de la lumière (franges de Lucas-Biquard, 1932-1934, [9], [10] et figures de Bergmann-Schaefer, 1949 [1]). La mesure des déformations statiques, quoique plus délicate, peut également être faite par des méthodes optiques très précises. Il serait souhaitable que ces études expérimentales soient reprises. Si l'on joint aux coefficients d'élasticité les fréquences des oscillations thermiques, décelées par l'effet Raman, l'absorption ou la réflexion sélective des radiations infra-rouge et surtout par la diffusion des rayons X et des neutrons, on obtient des données suffisamment nombreuses et précises pour déterminer sans erreur grave les principales constantes de rappel atomiques, $C^{m-p}_{\substack{j\ k\\ \alpha\ \beta}}$, celles qui portent sur les atomes proches voisins (H. Curien, 1952 [12]). Et ces constantes de rappel sont des documents précieux pour guider et contrôler les recherches théoriques qui ont pour objet le champ de force dans le milieu cristallin.

Manuscrit reçu le 6 novembre 1956.

Note

Coefficients d'élasticité isotherme et coefficients d'élasticité adiabatique

Tels qu'ils ont été définis, les coefficients d'élasticité statique $\mathfrak{N}^{\alpha\gamma,\beta\delta}$ se rapportent aux déformations qui laissent constante l'énergie de l'agitation thermique et qui ont donc lieu à une température constante. Ce sont des coefficients d'élasticité isotherme, fonction de la température absolue Θ. Je les désignerai par $\mathfrak{N}_\theta^{\alpha\gamma,\beta\delta}$.

([5]) Le désaccord est tel que, souvent, il est impossible de calculer les coefficients « atomiques », $\mathfrak{N}^{11,11}$, $\mathfrak{N}^{22,33}$ et $\mathfrak{N}^{23,23}$ connaissant les coefficients de Voigt, $c^{11,11}$, $c^{22,33}$ et $c^{23,23}$. Car les coefficients de Voigt ne sont pas, en général, directement déterminés par les mesures, mais déduits des mesures par un raisonnement conforme à la théorie classique ; et les expérimentateurs donnent presque toujours leurs résultats interprétés, rarement les données immédiates de leurs expériences.

Envisageons un cristal à la température Θ, sa dilatation entre l'état inerte (zéro absolu, agitation thermique éteinte) et cette température étant $(\eta_{\beta\delta})$, et les tensions (thermiques) développées par cette dilatation s'élevant à $\mathfrak{T}^{\alpha\gamma}$. Une déformation isotherme $(t_{\beta\delta})$ — que nous supposerons minime, telle que la loi de Hooke reste valable — développe des tensions supplémentaires :

$$T_\theta^{\alpha\gamma} = \sum_{\beta\delta} \mathfrak{N}_\theta^{\alpha\gamma,\beta\delta}\, t_{\beta\delta}\,; \qquad \alpha, \gamma, \beta, \delta = 1, 2, 3. \qquad (1)$$

De sorte que la déformation totale $(\eta_{\beta\delta} + t_{\beta\delta})$ est produite par les tensions totales : $\mathfrak{T}^{\alpha\gamma} + T_\theta^{\alpha\gamma}$.

Si l'énergie reçue par le cristal au cours de la dilatation $(\eta_{\alpha\gamma})$ a pour densité (par unité de volume) $\mathcal{E}(\eta_{\alpha\gamma})$, l'énergie nécessaire pour produire la déformation totale $(\eta_{\alpha\gamma} + t_{\alpha\gamma})$ prend, à l'approximation de Hooke, une densité

$$\mathcal{E}(\eta_{\alpha\gamma} + t_{\alpha\gamma}) = \mathcal{E}(\eta_{\alpha\gamma}) + \sum_{\alpha\gamma} \mathcal{E}'(\eta_{\alpha\gamma})\, t_{\alpha\gamma} + \frac{1}{2\,!} \sum_{\alpha\gamma\beta\delta} \mathcal{E}''(\eta_{\alpha\gamma}, \eta_{\beta\delta})\, t_{\alpha\gamma}\, t_{\beta\delta}.$$

Nous avons :

$$\mathcal{E}'(\eta_{\alpha\gamma}) = \left[\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x_{\alpha\gamma}}\right]_{(x_{\alpha\gamma} = \eta_{\alpha\gamma})} = \mathfrak{T}_{\alpha\gamma}$$

$$\mathcal{E}''(\eta_{\alpha\gamma}, \eta_{\beta\delta}) = \left[\frac{\mathfrak{T}_{\alpha\gamma}}{\partial x_{\beta\delta}}\right]_{x_{\beta\delta} = \eta_{\beta\delta}} = \mathfrak{N}_\theta^{\alpha\gamma,\beta\delta}.$$

La densité de l'énergie reçue par le milieu cristallin au cours de la déformation isotherme $(t_{\alpha\gamma})$ comprend deux parts :

$$\mathcal{E}(\eta_{\alpha\gamma} + t_{\alpha\gamma}) - \mathcal{E}(\eta_{\alpha\gamma}) = u_\theta + w_\theta$$

$$u_\theta = \sum_{\alpha\gamma} \mathfrak{T}^{\alpha\gamma}\, t_{\alpha\gamma} \qquad (2)$$

$$w_\theta = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\gamma\beta\gamma} \mathfrak{N}_\theta^{\alpha\gamma,\beta\delta}\, t_{\alpha\gamma}\, t_{\beta\delta}. \qquad (3)$$

Soit v le volume initial du cristal. L'énergie $u_\theta\, v$ exprime le travail accompli par les tensions thermiques. Selon que cette énergie est positive ou négative, elle est prise ou cédée au milieu extérieur sous forme de chaleur. La seconde énergie $w_\theta\, v$ mesure le travail effectué par les tensions $T_\theta^{\alpha\gamma}$ (1). C'est le travail nécessaire pour effectuer la déformation isotherme $(t_{\beta\delta})$.

Envisageons maintenant la même déformation $(t_{\beta\delta})$, mais adiabatique ; et considérons le cas où les tensions exercées $T^{\alpha\gamma}$, de même sens que les tensions thermiques, produisent une déformation $(t_{\beta\delta})$ qui dilate le milieu cristallin.

Le travail, positif, accompli par les tensions thermiques, $\mathfrak{T}^{\alpha\gamma}$, est pris maintenant à l'énergie d'agitation thermique du cristal. Si ces tensions font un travail $v\, du_\sigma$, la température du milieu cristallin s'abaisse de :

$$d\Theta = \frac{du_\sigma}{c\rho}$$

c étant la chaleur spécifique à volume constant, exprimée en ergs par degrés, et ρ la masse spécifique du cristal. Et quand la température du milieu cristallin tombe de Θ à $\Theta - d\Theta$ les tensions thermiques diminuent de

$$d\mathfrak{T}^{\alpha\gamma} = \lambda_\theta^{\alpha\gamma}\, d\Theta$$

$\lambda_\theta^{\alpha\gamma}$ est le coefficient thermique de la tension $\mathfrak{T}^{\alpha\gamma}$ à la température Θ. Nous ferons aussi état des coefficients thermiques moyens, $\lambda^{\alpha\gamma}$, entre le zéro absolu et la température Θ, tels que :

$$\mathfrak{T}^{\alpha\gamma} = \lambda^{\alpha\gamma}\,\Theta + \varepsilon^{\alpha\gamma}$$

$\varepsilon^{\alpha\gamma}$ étant la tension résiduelle due à l'agitation thermique des atomes au zéro absolu.

Ainsi, au cours de la déformation adiabatique envisagée, la température du milieu cristallin s'abaisse, les tensions thermiques diminuent ; elles accomplissent donc un travail

$$u_\sigma\, v = (u_\theta - \delta u)\, v \tag{4}$$

inférieur à $u_\theta\, v$ (2).

Si les déformations $t_{\beta\delta}$ sont produites successivement, on trouve que la densité d'énergie δu varie avec leur ordre de succession, mais dans une proportion minime. Pour éliminer cette indétermination, nous supposerons que les déformations $t_{\beta\delta}$ ont lieu en même temps, leurs grandeurs instantanées restant dans des rapports constants, égaux aux rapports de leurs grandeurs définitives. Ces conditions satisfaites, nous obtenons :

$$\delta u = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \lambda_\theta^{\alpha\gamma}\,\frac{\lambda^{\beta\delta}\,\Theta + \varepsilon^{\beta\delta}}{c\rho}\, t_{\alpha\gamma}\, t_{\beta\delta}. \tag{5}$$

Une fois la déformation adiabatique accomplie, la déformation totale du milieu cristallin est la même, $(\eta_{\beta\delta} + t_{\beta\delta})$, qu'à la fin de la déformation isotherme. Mais le cristal a perdu une énergie d'agitation thermique $(u_\theta - \delta u)\, v$. Restituons-lui cette énergie en maintenant la déformation totale $(\eta_{\beta\delta} + t_{\beta\delta})$ constante. Cela fait, le cristal se trouve exactement dans l'état atteint à la fin de la déformation isotherme : même température, Θ, et mêmes tensions totales $\mathfrak{T}^{\alpha\gamma} + T_\theta^{\alpha\gamma}$. Donc le cristal a reçu en tout la même énergie qu'au cours de la déformation isotherme. Si $w_\sigma\, v$ est l'énergie nécessaire pour produire la déformation adiabatique, nous avons en conséquence :

$$u_\theta - \delta u + w_\sigma = u_\theta + w_\theta.$$

D'où nous déduisons,

$$\begin{aligned} w_\sigma &= w_\theta + \delta u \\ &= \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta\gamma\delta}\left(\mathfrak{N}_\theta^{\alpha\gamma,\beta\delta} + \lambda_\theta^{\alpha\gamma}\,\frac{\lambda^{\beta\delta}\,\Theta + \varepsilon^{\beta\delta}}{c\rho}\right) t_{\alpha\gamma}\, t_{\beta\delta}, \end{aligned} \tag{6}$$

compte tenu de (3) et (5).

Cela concerne le cas où les tensions $T^{\alpha\gamma}$ exercées ont le même sens que les tensions thermiques. Si elles sont de sens opposés, la déformation adiabatique $(t_{\beta\delta})$ contracte le milieu cristallin. Au cours de cette déformation, les tensions thermiques accomplissent un travail négatif qui s'exprime encore :

$$(u_\theta - \delta u)\, v\,; \qquad u_\theta < 0.$$

Le travail $|u_\theta| + \delta u$, positif, égal et opposé, se transforme en énergie d'agitation thermique. La température du cristal s'élève. Et, pour ramener le cristal à la température initiale Θ, il est nécessaire de lui reprendre l'énergie d'agitation thermique $|u_\theta| + \delta u$. De sorte qu'en répétant le même raisonnement, nous retombons sur la même relation (6).

Les tensions développées par la déformation adiabatique s'expriment :

$$\begin{aligned} T_\sigma^{\alpha\gamma} &= \frac{\partial w_\sigma}{\partial t_{\alpha\gamma}} \\ &= \sum_{\beta\delta}\left[\mathfrak{N}_\theta^{\alpha\gamma,\beta\delta} + \frac{1}{2}\left(\lambda_\theta^{\alpha\gamma}\,\frac{\lambda^{\beta\delta}\,\Theta + \varepsilon^{\beta\delta}}{c\rho} + \lambda_\theta^{\beta\delta}\,\frac{\lambda^{\alpha\gamma}\,\Theta + \varepsilon^{\alpha\gamma}}{c\rho}\right)\right] t_{\beta\delta} \\ &= T_\theta^{\alpha\gamma} + \frac{1}{2}\sum_{\beta\delta}\left(\lambda_\theta^{\alpha\gamma}\,\frac{\lambda^{\beta\delta}\,\Theta + \varepsilon^{\beta\delta}}{c\rho} + \lambda_\theta^{\beta\delta}\,\frac{\lambda^{\alpha\gamma}\,\Theta + \varepsilon^{\alpha\gamma}}{c\rho}\right) t_{\beta\delta}. \end{aligned}$$

Elles excèdent les tensions $T_\theta^{\alpha\gamma}$ (1) développées par la déformation isotherme. Les coefficients d'élasticité adiabatique $\mathfrak{N}_\sigma^{\alpha\gamma,\beta\delta}$ se rapportent aux tensions $T_\sigma^{\alpha\gamma}$:

$$T_\sigma^{\alpha\gamma} = \sum_{\beta\delta}\mathfrak{N}_\sigma^{\alpha\gamma,\beta\delta}\, t_{\beta\delta}.$$

Donc,

$$\mathfrak{N}_\sigma^{\alpha\gamma,\beta\delta} = \mathfrak{N}_\theta^{\alpha\gamma,\beta\delta} + \frac{1}{2}\left(\lambda_\theta^{\alpha\gamma}\,\frac{\lambda^{\beta\delta}\,\Theta + \varepsilon^{\beta\delta}}{c\rho} + \lambda_\theta^{\beta\delta}\,\frac{\lambda^{\alpha\gamma}\,\Theta + \varepsilon^{\alpha\gamma}}{c\rho}\right). \tag{7}$$

Nous trouvons que les coefficients d'élasticité adiabatique sont, comme les coefficients d'élasticité isotherme, symétriques en $\alpha\gamma$ et $\beta\delta$; mais c'est en supposant toutes les déformations $t_{\beta\delta}$ produites en même temps.

Pour définir les coefficients d'élasticité adiabatique les théoriciens de l'élasticité classique font appel exclusivement à la thermodynamique. Ils ne rencontrent nulle indétermination. Mais ils estiment la chaleur spécifique à volume constant, c, par la formule :

$$c = C - \sum_{\alpha\gamma}\lambda_\theta^{\alpha\gamma}\,\Theta\, a_{\alpha\gamma}$$

C étant la chaleur spécifique à pression constante et $a_{\alpha\gamma}$ les coefficients de dilatation linéaire

$$\left(a_{\alpha\gamma} = \left[\frac{\partial\eta_{\alpha\gamma}}{\partial x_\theta}\right]_{(x_\theta = \Theta)}\right).$$

C'est une approximation ; en fait :

$$c = C - \sum_{\alpha\gamma}\mathfrak{T}^{\alpha\gamma}\, a_{\alpha\gamma}.$$

Les différences $\lambda_\theta^{\alpha\gamma}\,\Theta - \mathfrak{T}^{\alpha\gamma}$ $(\alpha, \gamma = 1, 2, 3)$ ne

sont pas nulles. Négligeons les néanmoins, c'est-à-dire posons :

$$\lambda_\theta^{\alpha\gamma}\,\Theta = \lambda^{\alpha\gamma}\,\Theta + \varepsilon^{\alpha\gamma}.$$

La densité d'énergie δu (6) (4) se trouve déterminée à des termes infimes près. Elle s'exprime :

$$\delta u - \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\lambda_\theta^{\alpha\gamma}\,\lambda_\theta^{\beta\delta}}{c\rho}\,\Theta\, t_{\alpha\gamma}\, t_{\beta\delta}.$$

Et nous retombons sur la relation classique :

$$\mathfrak{N}_\sigma^{\alpha\gamma,\beta\delta} = \mathfrak{N}_\theta^{\alpha\gamma,\beta\delta} + \frac{\lambda_\theta^{\alpha\gamma}\,\lambda_\theta^{\beta\delta}}{c\rho}\,\Theta.$$

Rapportés au même système de référence, les coefficients d'élasticité dynamique et les coefficients d'élasticité statique sont liés par la relation (19, III). La formule (7) donne :

$$\mathcal{D}_{\sigma\,\alpha\beta}^{\;\gamma\delta} = \mathcal{D}_{\theta\,\alpha\beta}^{\;\gamma\delta} + \frac{1}{4}\left(\lambda_{\theta\,\alpha}^{\;\gamma}\,\frac{\lambda_\beta^\delta\,\Theta + \varepsilon_\beta^\delta}{c\rho} + \lambda_{\theta\,\beta}^{\;\delta}\,\frac{\lambda_\alpha^\gamma\,\Theta + \varepsilon_\alpha^\gamma}{c\rho} + \lambda_{\theta\,\alpha}^{\;\delta}\,\frac{\lambda_\beta^\gamma\,\Theta + \varepsilon_\beta^\gamma}{c\rho} + \lambda_{\theta\,\beta}^{\;\gamma}\,\frac{\lambda_\alpha^\delta\,\Theta + \varepsilon_\alpha^\delta}{c\rho} \right).$$

(6) C'est-à-dire, la densité d'energie δu, ne varie plus sensiblement avec l'ordre dans lequel se succède les déformations $t_{\beta\delta}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Born (M.) et Huang (K.), Dynamical Theory of Crystal Lattices, Oxford, 1954.
[2] Lundqvist (S. O.), *Ark. Fys.*, 1955, **9**, 435.
[3] Voigt (W.), Lehrbuch der Krystallphysik, Leipzig, Teubner, 1910.
[4] Le Corre (Y.), *Bull. Soc. franç. Minér. Crist.*, 1954, **77**, 1363 ; 1955, **78**, 33.
[5] Viswanathan (K. S.), *Proc. Indian Acad. Sc.*, 1954, *A* **39**, 196.
[6] Raman (C. V.) et Viswanathan (K. S.), *Proc. Indian Acad. Sc.*, 1955, **42**, 1, 51.
[7] Born (M.), Atomtheorie des Festen Zustandes, Leipzig, Teubner, 1923.
[8] Le Corre (Y.), *Bull. Soc. franç. Minér. Crist.*, 1953, **75**, 197.
[9] Lucas (R.) et Biquard (P.), *J. Physique Rad.*, 1932, **3**, 464.
[10] Lucas (R.) et Biquard (P.), *J. Physique Rad.*, 1934, **5**, 119.
[11] Bergmann (L.), Der Ultraschall, chap. IV, Zürich, Hirsel, 1954.
[12] Curien (H.), *Bull. Soc. franç. Minér. Crist.*, 1952, **75**, 197.

REVUE DES LIVRES

Cohen et Treille, **Précis d'énergie nucléaire** (1 vol., 16 × 24,5 cm, xx + 294 pages, Dunod, éditeur, Paris, 1957.)

Les auteurs ont reproduit le cours qu'ils professent à l'École Supérieure du Génie Maritime, cours dont le but est d'informer les ingénieurs qui auront la tâche d'exploiter les installations mettant en œuvre l'énergie nucléaire. M. Francis Perrin a écrit une préface pour ce Précis.

Dans une première partie, ce sont des rappels concernant la physique moderne qui sont présentés aux lecteurs. Le deuxième chapitre est consacré aux éléments de physique nucléaire : définitions et faits fondamentaux nécessaires à la compréhension du fonctionnement des réacteurs nucléaires qui font l'objet des chapitres suivants.

L'exploitation des réacteurs ne va pas sans les études de protection du personnel et la connaissance des méthodes de détection et de mesure des divers rayonnements émis pendant le fonctionnement des piles.

Pour terminer les auteurs passent en revue les diverses applications industrielles de l'énergie nucléaire et des rayonnements.

Dupuy.

Annual Review of Nuclear Science (1 vol., 15 × 22,5 cm, relié 417, pages, Annual Reviews Inc. Palo Alto, Californie, U. S. A., 1956.)

C'est le sixième volume de cette revue annuelle de la science nucléaire ; comme les précédents il permet d'avoir un tableau d'ensemble concernant l'avancement d'une question et une bibligraphie complète. Les sujets traités sont les suivants :

Variations dans le temps des rayons cosmiques primaires, par V. Sarabhai et N. W. Nerurkar. — *Polarisation des nucléons rapides*, par L. Wolfenstein. — *Excitation des noyaux par les particules chargées*, par N. P. Heydenburg et G. H. Temmer. — *Déplacement isotopique dans les spectres atomiques*, par J. E. Mack et H. Arroe. — *Propriétés des noyaux de masse moyenne*, par K. Way, D. N. Kundu, C. L. MacGinnis et R. Van Lieshout. — *Acidité généralisée dans les séparations radiochimiques*, par R. A. Horne, C. D. Coryell et L. S. Goldring. — *Les masses des noyaux légers*, par J. Mattauch, L. Waldmann, R. Bieri et F. Everling. — *Les effets des radiations nucléaires dans les solides*, par H. Brooks. — *Applications des isotopes de l'oxygène dans les études chimiques*, par H. Taube. — *Progrès récents dans les techniques de comptage à faible fréquence*, par E. C. Anderson et G. N. Hayes. — *Réacteurs nucléaires pour la production d'énergie électrique*, par L. Davidson, W. A. Loeb et G. Young. — *Radiobiologie cellulaire*, par H. Gray. — *Radiobiologie des vertébrés ; embryologie*, par P. O'Brien.

Dupuy.

SECTIONS EFFICACES D'INTERACTION ÉLECTRON-ÉLECTRON ET ÉLECTRON-ION DANS LES PLASMAS.

Par MICHEL BAYET,
Faculté des Sciences de Toulouse.

1. **Rappel de quelques définitions concernant les sections efficaces** [1]. — Dans tout cet article, il ne sera question que d'interactions *purement élastiques* entre particules, mais les définitions ci-dessous peuvent s'adapter au cas des interactions inélastiques.

1° GÉNÉRALITÉS. — Étant donné un faisceau monocinétique, homogène et d'extension infinie formé de Γ « particules incidentes » A (de masse m et de vitesse v_0) par unités d'aire et de temps, et une particule immobile B (« but ») de masse M, on définira la « section efficace différentielle » (s. e. d.) (1) d'interaction élastique de la particule B pour les particules A, soit $F_{(\alpha,v_0)}$, de la façon suivante : on compte durant un temps dt le nombre $\delta\mathcal{N}_{(\alpha,v_0)}$ de particules A qui sont déviées d'un angle compris entre α et $\alpha + \mathrm{d}\alpha$, et l'on écrit que ce nombre est proportionnel à Γ, à dt, et à dα :

$$\delta\mathcal{N}_{(\alpha,v_0)} = F_{(\alpha,v_0)}\, \Gamma\, \mathrm{d}\alpha\, \mathrm{d}t.$$

La section efficace totale Q s'obtiendra évidemment en intégrant la s. e. d. pour toutes les valeurs de α :

$$Q_{(v_0)} = \int F_{(\alpha,v_0)}\, \mathrm{d}\alpha.$$

Nous admettrons qu'il y a une relation biunivoque, dépendant de v_0, entre l'angle de déviation α et le « paramètre d'impact » b (*fig.* 1), α tendant vers 0 avec b^{-1} si l'intensité de l'interaction entre les deux particules décroît lorsque leur distance mutuelle r augmente indéfiniment. On aura alors :

$$\delta\mathcal{N}_{(\alpha,v_0)} = \Gamma\, \mathrm{d}t \times 2\pi\, b_{(\alpha,v_0)}\, \mathrm{d}b,$$

d'où :

$$F_{(\alpha,v_0)}\, \mathrm{d}\alpha = 2\pi\, b_{(\alpha,v_0)}\, \mathrm{d}b$$

et :

$$Q_{(v_0)} = \int 2\pi\, b_{(\alpha,v_0)}\, \mathrm{d}b$$

$Q_{(v_0)}$ sera finie si l'interaction (donc la déviation α), devient rigoureusement nulle pour une valeur assez grande du paramètre d'impact b ; dans le cas contraire, s'il faut intégrer pour toutes les valeurs de b, elle sera infinie.

La relation entre Q et v_0 dépendra de la loi de forces entre A et B, et des masses m et M. En outre, Q n'aura pas la même valeur, selon qu'on la mesure dans le « système du laboratoire » S_l lié à B avant le choc, mais non après, ou dans un système lié continuellement à B, auquel cas on dira que l'on étudie la « déviation relative » α_r, conduisant à une « section efficace relative » Q_r mesurée dans le « système relatif » S_r.

2° SECTION EFFICACE POUR LE TRANSFERT DES MOMENTS. — Toutes les déviations n'ont pas la même importance relative en ce qui concerne les variations de la quantité de mouvement p et de l'énergie cinétique w de la particule incidente : l'importance de celles qui correspondent à $\alpha \# 0$ est évidemment très faible. Si l'on se place dans le système S_r, on voit que la diminution relative de la projection de la quantité de mouvement selon la direction d'incidence de A est égale à :

$$\left(\frac{\Delta p}{p}\right)_r = \frac{v_0 - v_0 \cos \alpha_r}{v_0} = 1 - \cos \alpha_r = 2 \sin^2 \frac{\alpha_r}{2}.$$

On appellera alors « section efficace (relative) pour le transfert des moments » la quantité :

$$\overline{Q_r} = \int 2\pi \left(\frac{\Delta p}{p}\right)_r b\, \mathrm{d}b = 4\pi \int \sin^2 \frac{\alpha_r}{2}\, b_{(\alpha_r,v_0)}\, \mathrm{d}b,$$

mais on prendra généralement comme variable α_r que l'on fera varier entre π et 0. On remarquera que $\overline{Q_r}$ est forcément inférieur à :

$$Q_r = 2\pi \int b_{(\alpha_r,v_0)}\, \mathrm{d}b,$$

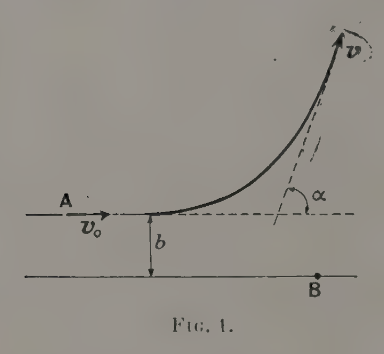


FIG. 1.

(1) On ajoute encore quelquefois : « polaire », pour différencier F de la s. e. d. « tout court » donnée par

$$G_{(\alpha,v_0)} = \frac{1}{2\pi \sin \alpha} F_{(\alpha,v_0)}.$$

mais que, de plus, elle pourra être finie même si Q_r est infinie, car, pour b augmentant indéfiniment, $1 - \cos \alpha_r$ est équivalent à $\alpha_r^2/2$ qui tend vers 0.

Dans le système de référence S_l, il faut tenir compte à la fois des variations de l'angle de déviation (α_r devient α) et du module de la vitesse (v_0 devient v après le choc). Deux cas sont pratiquement très importants :

α) $m/M = \varepsilon \ll 1$.

On voit alors facilement que l'on a : $\alpha \# \alpha_r$, $v \# v_0$, de sorte que l'on peut écrire :

$$\left(\frac{\Delta p}{p}\right)_l \# 1 - \cos \alpha_r = 2 \sin^2 \frac{\alpha_r}{2}$$

d'où :

$$\overline{Q_l^\varepsilon} = 2\pi \int \left(\frac{\Delta p}{p}\right)_l b \, \mathrm{d}b \# 4\pi \int \sin^2 \frac{\alpha_r}{2} \mathrm{d}b = \overline{Q_r^\varepsilon}.$$

β) $m/M = 1$.

On peut alors montrer que l'on a : $\alpha = \alpha_r/2$, $v = v_0 \cos \alpha$, de sorte que l'on a ici :

$$\left(\frac{\Delta p}{p}\right)_l = \frac{v_0 - v_0 \cos^2 \alpha}{v_0} = \sin^2 \frac{\alpha_r}{2}$$

d'où :

$$\overline{Q_l^1} = 2\pi \int \left(\frac{\Delta p}{p}\right)_l b_{(\alpha, v_0)} \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\alpha} \mathrm{d}\alpha$$
$$= \pi \int \sin^2 \frac{\alpha_r}{2} b_{(\alpha_r, v_0)} \mathrm{d}b = \frac{1}{4} \overline{Q_r^1}.$$

3° Section efficace pour les échanges d'énergie. — On ne peut évidemment l'envisager dans S_r, puisque l'on y a : $|\mathbf{v}_r| \equiv v_0$ de sorte que l'énergie cinétique de A, $w_r = 1/2 \, m v_r^2$, y reste constante. Dans S_l, la diminution relative de l'énergie cinétique de A sera donnée par :

$$\left(\frac{\Delta w}{w}\right)_l \equiv 1 - \frac{v^2}{v_0^2} = \theta^2 \sin^2 \frac{\alpha_r}{2}$$

si l'on pose :

$$\theta^2 = \frac{4mM}{(m + M)^2},$$

d'où l'on tire :

$$\theta = 2 \left(1 + \frac{m}{M}\right)^{-1} \sqrt{\frac{m}{M}}.$$

On appellera alors « section efficace pour les échanges d'énergie » la quantité :

$$\overline{\overline{Q_l}} = \int 2\pi \left(\frac{\Delta w}{w}\right)_l b \, \mathrm{d}b = 2\pi\theta^2 \int \sin^2 \frac{\alpha_r}{2} b \, \mathrm{d}b.$$

Deux cas sont pratiquement très importants :

α) $m/M = \varepsilon \ll 1$.

On a alors :

$$\theta \# 2\sqrt{m/M},$$

de sorte que l'on a :

$$\overline{\overline{Q_l^\varepsilon}} = 8\pi \frac{m}{M} \int \sin^2 \frac{\alpha_r}{2} b \, \mathrm{d}b = 2 \frac{m}{M} \overline{Q_l^\varepsilon} \# 2 \frac{m}{M} \overline{Q_r^\varepsilon}.$$

β) $m/M = 1$.

On a alors :

$$\theta^2 = 1 = m/M,$$

de sorte que :

$$\overline{\overline{Q_l^1}} = 2\pi \int \sin^2 \frac{\alpha_r}{2} b_{(\alpha, v_0)} \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\alpha} \mathrm{d}\alpha = \overline{Q_l^1} = \frac{1}{4} \overline{Q_r^1} \text{ (}^2\text{)}.$$

2. **Rappel de quelques résultats concernant l'interaction coulombienne** [1]. — L'étude, dans le système de référence S_r, de l'interaction coulombienne entre une particule A (dont on suppose la charge électrique égale à ze) et la particule B (de charge Ze) montre que l'on a :

$$F(\alpha_r) = \pi b_M^2 \frac{\cos \frac{\alpha_r}{2}}{\sin^3 \frac{\alpha_r}{2}} \qquad \text{(formule de Rutherford)}$$

si l'on pose :

$$b_M = \left(1 + \frac{m}{M}\right) b_\infty = \left(1 + \frac{m}{M}\right) \frac{zZe^2}{mv_0^2};$$

on a alors :

$$\operatorname{tg} \alpha_r/2 = \frac{b_M}{b};$$

b_M représente la valeur du paramètre d'impact b pour laquelle la déviation α_r de la particule incidente est égale à $\pi/2$; elle représente également la moitié de la « distance minimum d'approche » entre A et B obtenue pour $b = 0$ (et $zZ > 0$) ; b_∞ est la valeur de b_M correspondant au cas où Me st infinie. Dans ce dernier cas, c'est-à-dire pour $m/M = 0$, les sections efficaces d'interaction coulombienne (dans S_r comme dans S_l) s'écriront donc :

$$Q_c = \pi b_\infty^2 \int \frac{\cos \frac{\alpha_r}{2}}{\sin^3 \frac{\alpha_r}{2}} \mathrm{d}\alpha_r;$$

$$\overline{Q_c} = 2\pi b_\infty^2 \int \frac{\cos \frac{\alpha_r}{2}}{\sin \frac{\alpha_r}{2}} \mathrm{d}\alpha_r. \qquad (1)$$

(²) Pour être complet, il faudrait ajouter à ces trois sections efficaces les deux quantités suivantes, qui s'en déduisent immédiatement (ainsi que les sections différentielles correspondantes :

Section efficace de diffusion des moments

$$Q' = Q - \overline{Q}.$$

Section efficace de diffusion de l'énergie

$$Q'' = Q - \overline{\overline{Q}}.$$

On aura évidemment $\overline{\overline{Q_c}} \equiv 0$, et par suite :

$$
\begin{array}{lll}
Q_r^\varepsilon \;\#\; Q_c & \overline{Q_r^\varepsilon} \;\#\; \overline{Q_c} & \overline{\overline{Q_r^\varepsilon}} \equiv 0 \\
Q_i^\varepsilon \;\#\; Q_c & \overline{Q_i^\varepsilon} \;\#\; \overline{Q_c} & \overline{\overline{Q_i^\varepsilon}} \;\#\; 2\frac{m}{M}\overline{Q_c} \\
Q_r^1 = 4Q_c & \overline{Q_r^1} = 4\overline{Q_c} & \overline{\overline{Q_r^1}} \equiv 0 \\
Q_i^1 = 4Q_c & \overline{Q_i^1} = \frac{1}{4}\overline{Q_r'} = \overline{Q_c} & \overline{\overline{Q_i^1}} = \overline{Q_i^1} = \overline{Q_c}.
\end{array}
$$

De ce tableau nous extrayons les quatre résultats essentiels concernant les sections efficaces dans le système du laboratoire :

	$0 < \frac{m}{M} = \varepsilon \ll 1$	$\frac{m}{M} = 1$
s. e. pour le transfert des moments : $(\overline{Q_l})$	$\overline{Q_c}$	$\overline{Q_c}$
s. e. pour les échanges d'énergie : $(\overline{\overline{Q_l}})$	$2\frac{m}{M}\overline{Q_c}$	$\overline{Q_c}$

Nous nous trouvons donc ramenés au seul calcul de l'intégrale $\overline{Q_c}$; or cette intégrale diverge, pour α_r tendant vers 0, comme $\int \frac{\mathrm{d}\alpha_r}{\alpha_r}$, ou, si l'on veut pour b augmentant indéfiniment, comme ln b ; on peut en effet écrire, puisque l'on a : $\operatorname{tg}\frac{\alpha_r}{2} = \frac{b_\infty}{b}$

$$\overline{Q_c} = 2\pi\, b_\infty^2 \int \operatorname{cotg}\frac{\alpha_r}{2}\,\mathrm{d}\alpha_r = 2\pi\, b_\infty^2 \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}(b^2)}{b^2 + b_\infty^2}.$$

Les sections efficaces $\overline{Q}$ et $\overline{\overline{Q}}$ sont donc théoriquement infinies dans le cas de l'interaction coulombienne ; mais nous allons voir comment, en pratique, elles peuvent être limitées, autrement que par les dimensions finies du milieu.

3. Rappel de quelques résultats relatifs aux « gaz de Lorentz ». — Dans cet article, nous nommerons « gaz de Lorentz », l'ensemble formé d'un gaz de particules « légères » (de masse m) et d'un gaz de particules « lourdes » (de masse M), sans préjuger de leur concentration relative ; ce gaz binaire sera en outre supposé homogène et infini, et pourra éventuellement coexister avec d'autres espèces de particules. Généralement, et en particulier dans de précédents articles [2] (respectivement désignés dans la suite par I, II, III, IV), ce terme implique en outre que le rôle des interactions entre particules légères dans la détermination de la forme de la fonction de distribution de leurs vitesses, $f_{(\mathbf{v},t)}$ est négligeable vis-à-vis de celui des chocs entre deux particules d'espèces différentes. Mais nous abandonnerons ici cette hypothèse restrictive, ce qui n'a évidemment aucune influence sur la valeur de « l'opérateur de collision du gaz de Lorentz, c'est-à-dire de l'opérateur qui représente l'action sur chacune des particules légères des chocs qu'elle subit de la part de l'ensemble des particules lourdes.

Dans ces conditions, nous avons montré (I) que les « fréquences de relaxation des anisotropies d'ordre i » de la fonction de distribution $f_{(\mathbf{v},t)}$ sont données, de façon rigoureuse dans le cas du gaz de Lorentz parfait $(m/M = 0)$ de façon approximative dans celui du gaz de Lorentz imparfait $(0 < m/M = \varepsilon \ll 1)$, par :

$$\overline{\nu_i} = N v_0 \overline{Q_i} = 2\pi N v_0 \int_0^\infty [1 - P_i(\cos\alpha)]\, b\, \mathrm{d}b$$

$$(i \geqslant 1\,; \quad \overline{\nu_0} \equiv 0).$$

Dans cette formule, N représente le nombre de particules lourdes par unité de volume, $\overline{Q_i}$ est la « section efficace pour le transfert des moments d'ordre i » associée à $\overline{\nu_i}$, et $P_i(\cos\alpha)$ le polynôme de Legendre d'ordre i. Comme on a : $P_1(\cos\alpha) \equiv \cos\alpha$, on voit que $\overline{Q_1}$ coïncide avec la section efficace $\overline{Q_r}$ définie au paragraphe 1.

Nous avons également montré (III) que les « fréquences de relaxation des écarts non maxwelliens d'ordre j » de la partie isotrope $f_{is(v,t)}$ de la fonction $f_{(\vec{v},t)}$ sont données, pour $0 < m/M = \varepsilon \ll 1$, par :

$$\overline{\overline{\nu_j^\varepsilon}} = N v_0 \overline{\overline{Q_j^\varepsilon}} = K \times 2j\frac{m}{M}\overline{\nu_1}$$

K étant un coefficient numérique de l'ordre de grandeur de l'unité. On voit donc qu'à un coefficient numérique près, on a : $\overline{\overline{Q_j^\varepsilon}} = 2\,\frac{m}{M}\,\overline{Q_1} = \overline{\overline{Q_i^\varepsilon}}$, $\overline{\overline{Q_i^\varepsilon}}$ étant la section efficace pour les échanges d'énergie définie au paragraphe 1.

Comme nous l'avons déjà mentionné, toutes ces sections efficaces, et les fréquences associées, sont fonction de v_0 par l'intermédiaire de α, c'est-à-dire de la loi de forces entre les deux types de particules. Si cette force est supposée centrale et proportionnelle à la puissance — s de la distance r $(s > 0)$, on peut montrer, d'une part que cette dépendance est de la forme : $\overline{Q_i} = \overline{Q_i^*}\, v_0^{\frac{-4}{s-1}}$, d'autre part que les $\overline{Q_i}$ (et par suite les ν_i et les $\overline{\nu_j}$) sont infinis pour $s \leqslant 2$ (III).

Dans le cas particulier limite $(s = 2)$ de l'interaction coulombienne, on retrouve ainsi les résultats mentionnés plus haut (§ 2). Donc, dans un gaz de Lorentz électron-ion, les électrons ne peuvent avoir, semble-t-il, qu'une fonction de distribution isotrope et maxwellienne à la température des ions. Toutefois on peut alors se demander quelle est la signification réelle de ces infinités, et s'il est bien légitime de négliger, dans un tel gaz de Lorentz, l'interaction électron-électron, qui est *a priori*, elle aussi, infinie.

4. Cas des plasmas : Notion d'écran (Debye). — En pratique, les milieux soumis aux physiciens sont

globalement neutres au point de vue électrique, et généralement ternaires. On pourra, dans la plupart des cas, les assimiler à un plasma comprenant, par unité de volume, N atomes ou molécules neutres A (de masse M), n ions positifs I (de masse M) et n électrons E (de masse m).

Il est alors possible d'admettre que la théorie proposée par Debye [3] pour les électrolytes liquides peut s'appliquer au cas des plasmas, au moins si l'on suppose que les particules électriquement chargées y sont en équilibre thermodynamique (à une température T_e qui peut être différente de la température T des molécules neutres). On peut montrer [3, 4] que dans ces conditions, le potentiel d'interaction Φ entre deux de ces charges est divisé par un terme qui décroît exponentiellement avec r, comme si l'ensemble des charges électriques de signes opposés entourant l'une d'entre elles « faisait écran » à son action sur les autres charges. Le potentiel Φ varie alors comme $(r\, e^{r/D})^{-1}$, ce qui, lorsque r croît indéfiniment, décroît plus vite que n'importe quelle puissance de r^{-1}.

La quantité D, qui a les dimensions d'une longueur et pour expression

$$D = \left(\frac{\eta k\, T_e}{8\pi\, ne^2}\right)^{1/2} \# \, 4{,}90 \left(\frac{T_e}{n}\right)^{1/2},$$

si l'on désigne par η la constante diélectrique relative du milieu par rapport au vide (prise égale à 1 dans la dernière formule), est appelée « distance » ou « rayon » de Debye.

Cette longueur jouera évidemment un rôle fondamental dans l'évaluation du rayon d'action des forces électrostatiques ; on pourra présumer que les sections efficaces d'interaction entre particules chargées ne pourront pas être beaucoup plus grandes que πD^2. Aussi, avant de préciser ce point, nous donnons dans le tableau I ci-dessous des valeurs approchées de D pour différentes valeurs de n et de T_e. Les chiffres marqués d'une astérique correspondent à un gaz d'électron très dégénéré, pour lequel on ne peut plus admettre que l'état d'équilibre est donné par la distribution maxwellienne, de sorte que la théorie de Debye n'est pas applicable (la distribution d'équilibre peut être considérée comme maxwellienne si l'on a $\frac{1}{n}\frac{(2\pi\, mk\, T_e)^{3/2}}{h^2} \gg 1$, soit : $2{,}5.10^{15}\frac{T_e^{3/2}}{n} \gg 1$; dans le cas contraire, il faut utiliser la distribution de Fermi). On a également indiqué dans ce tableau la valeur de la distance moyenne entre les particules chargées, soit $d = n^{-1/3}$.

Nous continuerons dans la suite à désigne par $\overline{Q_c}$

TABLEAU I

D cm | T ↘	n / d	3 / 0,7	3.10^2 / 0,14	3.10^4 / 0,03	3.10^6 / $0,7.10^{-2}$	3.10^8 / $1,4.10^{-3}$	3.10^{10} / 3.10^{-4}	3.10^{12} / $0,7.10^{-4}$	3.10^{14} / $1,4.10^{-5}$	3.10^{16} / 3.10^{-6}	3.10^{18} / $0,7.10^{-6}$	3.10^{20} / $1,4.10^{-7}$
3 °K		5	0,5	0,05	5.10^{-3}	5.10^{-4}	5.10^{-5}	5.10^{-6}	5.10^{-7}	5.10^{-8}*	5.10^{-9}*	5.10^{-10}*
30 °K		16	1,6	0,16	0,016	$1,6.10^{-3}$	$1,6.10^{-4}$	$1,6.10^{-5}$	$1,6.10^{-6}$	$1,6.10^{-7}$	$1,6.10^{-8}$*	$1,6.10^{-9}$*
300 °K		50	5	0,5	0,05	5.10^{-3}	5.10^{-4}	5.10^{-5}	5.10^{-6}	5.10^{-7}	5.10^{-8}*	5.10^{-9}*
3 000 °K		160	16	1,6	0,16	0,016	$1,6.10^{-3}$	$1,6.10^{-4}$	$1,6.10^{-5}$	$1,6.10^{-6}$	$1,6.10^{+7}$	$1,6.10^{-8}$*
30 000 °K		500	50	5	0,5	0,5	5.10^{-3}	5.10^{-4}	5.10^{-5}	5.10^{-6}	5.10^{-7}	5.10^{-8}
300 000 °K		1 600	160	16	1,6	0,16	0,016	$1,6.10^{-3}$	$1,6.10^{-4}$	$1,6.10^{-5}$	$1,6.10^{-6}$	$1,6.10^{-7}$

la section efficace définie au paragraphe 2, mais en tenant compte de l'effet d'écran ; le calcul de cette quantité, ainsi rendue finie, ne pourra plus bien entendu être effectué au moyen de la formule (1), puisque la déviation α doit maintenant être calculée pour un potentiel $\Phi = zZe^2(r\, e^{r/D})^{-1}$, calcul qui n'est malheureusement possible qu'au moyen de méthodes numériques. Toutefois, pour des valeurs assez grandes du paramètre d'impact b, correspondant à des valeurs de α assez faibles, on peut montrer (III) que, pour toutes les lois de force, α est proportionnel à $\frac{\Phi_{(b)}}{mv_0^2}$; comme, pour $n = 0$, on doit retrouver la valeur $2b_\infty/b$ correspondant au potentiel coulombien sans écran, on voit que l'on aura ici $\alpha \# 2b_\infty(b\, e^{b/D})^{-1}$, pourvu que l'on ait : $\alpha \ll 1$.

De cette dernière condition résulte que b doit être supérieure à une certaine valeur minima qui dépend de b_∞ et de D ; nous prendrons $b_\infty = \frac{e^2}{mv_0^2}$, supposant $z = Z = 1$, et nous poserons :

$$\frac{b_\infty}{D} = k_\infty = \frac{e^2}{mv_0^2\, D} = \frac{1}{8\pi}\frac{kT}{mv_0^2}\left(\frac{d}{D}\right)^3 \# \frac{1}{8\pi}\left(\frac{d}{D}\right)^3 \qquad (2)$$

si l'on ne s'intéresse qu'aux électrons de vitesse moyenne.

Si alors l'on a : $d \leqslant D$, on aura : $b_\infty \ll D$, et la condition $\alpha \ll 1$ sera certainement remplie si l'on prend $b \geqslant D$; on voit alors facilement que, pour calculer $\overline{Q_c}$, on peut limiter l'intégration sur b à la valeur $b = D$, l'intégrale prise entre D et l'infini, dont la valeur est alors approximativement : $\pi \int_D^\infty \alpha^2\, b\, \mathrm{d}b \# 4\pi\, b_\infty^2 \int_D^\infty (b\, e^{2b/D})^{-1}\, \mathrm{d}b$ étant alors négligeable devant l'intégrale prise entre 0 et D.

Mais si l'on a : $d/D > 3$, par exemple, on aura : $b_\infty > D$, et, pour être sur d'avoir $\alpha \ll 1$,

il faudra intégrer jusqu'à une valeur de b nettement supérieure à D ; on peut alors montrer [4] que, pour être sûr d'avoir une bonne précision relative sur $\overline{Q_c}$, la limite d'intégration doit être prise égale à la distance interionique $d > D$. Ce cas est toutefois moins courant en pratique que le premier ($d \leqslant D$), ainsi que le montre le tableau I, où l'on a mis en italiques les valeurs de D qui lui correspondent.

5. **Calcul approché des sections efficaces pour $d \leqslant D$.** — Nous ne calculerons $\overline{Q_c}$ que dans le cas $d \leqslant D$, pour lequel on peut limiter l'intégration sur b à la valeur $b = D$. Dans ces conditions ($b \leqslant D$), on aura : $1 \geqslant e^{-b/D} \geqslant e^{-1}$, de sorte que l'on ne commettra pas d'erreurs sur l'ordre de grandeur du résultat en négligeant le terme exponentiel du potentiel d'interaction, c'est-à-dire en utilisant la formule (1) relative au potentiel coulombien non perturbé [5]. Nous écrirons alors :

$$\overline{Q_c} = 2\pi\, b_\infty^2 \int \operatorname{cotg} \frac{\alpha_r}{2}\, d\alpha_r = 4\pi\, b_\infty^2 \int_0^D \frac{b\, db}{b^2 + b_\infty^2}$$

soit, en posant :

$$(b/b_\infty)^2 = u\,; \quad (D/b_\infty)^2 = k_\infty^{-2} = u_m \gg 1$$

$$\overline{Q_c} = 2\pi\, b_\infty^2 \int_0^{u_m} \frac{du}{1+u}$$

$$= 2\pi\, b_\infty^2\, ln\,(1 + u_m) \# 4\pi\, b_\infty^2\, ln \sqrt{u_m}.$$

Des valeurs de la quantité

$$\ln \sqrt{u_m} = \ln 8\pi (D/d)^3 = \ln 8\pi\, nD^3$$

sont données, pour $D \geqslant d$, et pour les mêmes valeurs de T_e et de n que précédemment, par le tableau II :

TABLEAU II

$\ln \sqrt{u_m}$ / T ↘ n	3	3.10²	3.10⁴	3.10⁶	3.10⁸	3.10¹⁰	3.10¹²	3.10¹⁴	3.10¹⁶	3.10¹⁸	3.10²⁰
3 °K	9,15	6,85	4,55	2,25 ?							
30 °K	12,60	10,30	8,0	5,70	3,40	1,10 ?					
300 °K	16,05	13,75	11,45	9,15	6,85	4,55	2,25 ?				
3 000 °K	19,50	17,20	14,90	12,60	10,30	8	5,70	3,40	1,10 ?		
30 000 °K	22,95	20,65	18,35	16,05	13,75	11,45	9,15	6,85	4,55	2,25 ?	
300 000 °K	26,40	24,10	21,80	19,50	17,20	14,90	12,60	10,30	8,00	5,70	3,40

On en déduit immédiatement la section efficace $\overline{Q_c}$:

$$\overline{Q_c} = 4\pi\, b_\infty^2\, ln \sqrt{u_m} = \frac{1}{16\pi}\left(\frac{kT_e}{mv_0^2}\right)^2 \frac{d^6}{D^4}\, ln \sqrt{u_m}$$

soit, en explicitant, si l'on néglige encore le facteur $\left(\frac{kT_e}{mv_0^2}\right)$:

$$\overline{Q_c} = \frac{4\pi\, e^4}{k^2\, T_e^2}\, ln \sqrt{u_m} \# 3{,}4\ 10^{-5}\ T_e^{-2}\, ln \sqrt{u_m}.$$

Les valeurs numériques correspondantes (en cm²) sont données par le tableau III :

On constate que $\overline{Q_c}$ dépend assez peu de la concentration ionique n, mais beaucoup de T_e ; son expression peut en effet se mettre sous la forme : $Q_c = \dfrac{A - \ln n - 3 \ln T_e}{B\, T_e^2}$; si l'on néglige les termes logarithmiques, on retrouve donc une variation en T_e^{-2} correspondant à la variation en v_0^{-4} de la formule de Rutherford. Aux températures T_e que l'on rencontre habituellement dans les plasmas, lesquelles ne dépassent guère 100 000° (de sorte qu'il est inutile de tenir compte des corrections de relativité), ces sections efficaces sont très grandes, en particulier si on les compare à celle qui résul-

TABLEAU III

$\overline{Q_c}$ ↘	n	3	3.10²	3.10⁴	3.10⁶	3.10⁸	3.10¹⁰	3.10¹²	3.10¹⁴	3.10¹⁶	3.10¹⁸	3.10²⁰
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
3 °K	(10^{-5} cm²)	3,2	2,4	1,6	0,8 ?							
30 °K	(10^{-7} cm²)	4,4	3,6	2,8	2	1,2	0,4 ?					
300 °K	(10^{-9} cm²(	5,6	4,8	4	3,2	2,4	1,6	0,8 ?				
3 000 °K	(10^{-11} cm²)	6,8	6	5,2	4,4	3,6	2,8	2	1,2	0,4 ?		
30 000 °K	(10^{-13} cm²)	8	7,2	6,4	5,6	4,8	4	3,2	2,4	1,6	0,8 ?	
300 000 °K	(10^{-15} cm²)	9,2	8,4	7,6	6,8	6	5,2	4,4	3,6	2,8	2	1,2

terait de la prise en considération du rayon « classique » de l'électron : $\frac{e^2}{mc^2} = 2{,}81.10^{-13}$ cm. Une section aussi faible correspondrait à une énergie cinétique de l'électron égale à son énergie propre, $mc^2 = 0{,}511$ MeV, c'est-à-dire à une température T_e d'environ 20 millions de degrés.

6. **Application au calcul des fréquences de relaxation dans les plasmas.** — Dans un plasma, chacun des constituants du gaz d'électron peut interagir, soit avec les atomes ou molécules neutres (interaction E-A), soit avec les ions positifs (interactions E-I), soit avec les autres électrons (interactions E-E). On pourrait de même envisager les interactions de chacun des ions et de chacune des particules neutres, mais, par suite du principe de l'égalité de l'action et de la réaction, on n'aurait que 3 nouvelles interactions à envisager (I-A, I-I et A-A). Parmi ces interactions, deux sont du type « gaz de Lorentz » (E-A et E-I), et deux sont régies par l'interaction coulombienne (E-I et E-E) (l'interaction I-I s'étudierait bien entendu de la même façon que l'interaction E-E, à la masse de la particule près).

Les sections efficaces d'interaction élastique (pour le transfert des moments) électron-molécule neutre $\overline{Q}_{EA}$ sont difficiles à déterminer théoriquement, dans l'ignorance où l'on est de la forme de la loi de forces entre ces deux particules : si l'interaction était du type électron-dipôle induit, on serait conduit à une force en r^{-5}, c'est-à-dire à une section efficace $\overline{Q}_{EA}$ proportionnelle à v_0^{-1}, ce qui est certainement trop simple pour rendre compte des faits expérimentaux, aux faibles énergies notamment (en particulier de l'effet Ramsauer dans le cas des gaz rares). Mais pour ce qui suit nous pourrons nous contenter d'admettre que ces sections sont de l'ordre de grandeur des « sections géométriques » des molécules, soit 10^{-15} cm² environ, pour les valeurs de l'énergie qui nous intéressent (toujours inférieure à 100 eV en pratique). On en déduira les sections efficaces pour les échanges d'énergie électron-molécule dans le système du laboratoire : $\overline{\overline{Q}}_{EA} \# 2\frac{m}{M}\overline{Q}_{EA}$, et enfin les fréquences de relaxation des électrons pour le gaz de Lorentz E-A :

$$\overline{\nu}_{EA} = Nv\overline{Q}_{EA}\,; \qquad \overline{\overline{\nu}}_{EA} = 2\frac{m}{M}Nv\overline{Q}_{EA}.$$

L'étude de l'interaction électron-ion conduit immédiatement de son côté aux valeurs suivantes des fréquences de relaxation électroniques pour le gaz de Lorentz E-I :

$$\overline{\nu}_{EI} = nv\overline{Q_c}\,; \qquad \overline{\overline{\nu}}_{EE} = 2\frac{m}{M}nv\overline{Q_c}.$$

Enfin l'étude des relaxations *propres* du gaz d'électron ne rentre pas dans le cadre du modèle du « gaz de Lorentz » (de même que les interactions I-I, A-A et I-A) ; on admettra toutefois que les fréquences de relaxation sont liées aux sections efficaces correspondantes par des formules du même type ($\nu = nvQ$), de sorte que l'on écrira, pour l'interaction E-E :

$$\overline{\nu}_{EE} = nv\overline{Q_c}\,; \qquad \overline{\overline{\nu}}_{EE} = nv\overline{Q_c}.$$

Les quotients ν/v correspondant à ces 6 fréquences de relaxation sont réunies dans le tableau suivant :

	E-A	E-I	E-E
$\overline{\nu}/v$ (moments)	$N\overline{Q}_{EA}$	$n\overline{Q_c}$	$n\overline{Q_c}$
$\overline{\overline{\nu}}/v$ (énergie)	$2\frac{m}{M}N\overline{Q}_{EA}$	$2\frac{m}{M}n\overline{Q_c}$	$n\overline{Q_c}$.

On en tirera les conclusions suivantes pour l'évolution de la fonction de distribution des vitesses électroniques $f_{(\mathbf{v},t)}$ dans les plasmas :

1° Relaxation des anisotropies de $f_{(\mathbf{v},t)}$. — Les relaxations E-E et E-I s'effectuent à la même vitesse ; il reste à les comparer à la relaxation E-A, c'est-à-dire à examiner le rapport $\frac{n}{N}\frac{\overline{Q_c}}{\overline{Q}_{EA}}$; or ce rapport est souvent de l'ordre de grandeur de l'unité : on peut avoir, par exemple, $n/N = 5\ 10^{-3}$ et $T_e = 30\ 000$ °K, d'où $\overline{Q_c} \# 2\ 10^{-13}$, et finalement : $\frac{\overline{\nu}_{EE}}{\overline{\nu}_{EA}} = \frac{n}{N}\frac{\overline{Q_c}}{\overline{Q}_{EA}} \# 1$. On voit alors facilement que, dans les cas d'espèce, l'un aussi bien que l'autre de ces processus de relaxion sera susceptible de l'emporter plus ou moins nettement sur l'autre.

2° « Maxwellianisation » de la partie isotrope $f_{1s}(v, t)$. — On voit tout de suite que les échanges d'énergie entre électrons l'emportent de beaucoup sur les échanges électrons-ions ; reste à les comparer avec les échanges E-A : or la fréquence de relaxation $\overline{\overline{\nu}}_{EE}$ est la même que la fréquence $\overline{\nu}_{EE}$, tandis que la fréquence $\overline{\overline{\nu}}_{EA}$ est m/M fois plus petite que la fréquence $\overline{\nu}_{EA}$; donc, même si $\overline{\nu}_{EA}$ est sensiblement supérieure (10 ou 100 fois) à $\overline{\nu}_{EE}$, par suite de la petitesse du rapport m/M, (de l'ordre de 10^{-4}), on aura *dans presque tous les cas* $\overline{\overline{\nu}}_{EE} \gg \overline{\overline{\nu}}_{EA}$, et l'on pourra dire que l'énergie susceptible d'être acquise par les électrons (sous l'action d'un champ électrique par exemple) se répartira d'abord entre les électrons (conduisant à la « maxwellianisation » de leur fonction de distribution, à une température T_e d'autant plus élevée que le rapport $\overline{\overline{\nu}}_{EE}/\overline{\overline{\nu}}_{EA}$ et l'énergie cédée par le champ dans l'unité de temps seront grands), avant d'être communiquée par le gaz d'électrons pris dans son ensemble au gaz de molécules neutres.

Ce résultat montre qu'il n'est pas légitime, dans un gaz même faiblement ionisé, de négliger l'interaction électron-électron pour calculer la fonction de distribution des vitesses électroniques $f_{(\mathbf{v},t)}$, et explique par suite l'échec des différentes théories basées sur le modèle du « gaz de Lorentz » (IV). Par contre on obtient probablement ainsi un ordre de grandeur assez exact de l'énergie acquise par les électrons et cédée aux molécules dans un état stationnaire, ce qui permet à ces théories de rendre compte à peu près correctement de certains résultats expérimentaux (champ disruptif des gaz en très haute fréquence), tels que ceux obtenus par Brown et ses collaborateurs dans une belle série d'expériences [6].

7. **Remarque.** — On admet généralement que tout potentiel créé à une distance r par une particule A, quelle que soit sa nature, est de la forme : $\Phi = \frac{\varepsilon}{r} e^{-r/r_0}$, avec $r_0 = \frac{h}{2\pi\mu_0 c}$, μ_0 étant la masse propre des particules φ associées au champ considéré. Tout se passe donc comme si le photon, particule de masse nulle associée au champ électromagnétique (r_0 infini) créé par une charge électrique ε prise isolément était remplacée, pour les charges (positives ou négatives) d'un plasma globalement neutre, par une particule de masse $\mu_0 = \frac{h}{2\pi cD} = m\frac{\bar{\lambda}_0}{D}$; on a posé $\bar{\lambda}_0 = \lambda_0/2\pi$, λ_0 étant la « longueur d'onde Compton » de l'électron de masse au repos m ($\lambda_0 = h/mc = 2{,}42\ 10^{-10}$ cm). On constate (tableau I) que l'on a presque toujours $\lambda_0 \ll D$, de sorte que l'on a : $\mu_0 \ll m$.

Bien entendu, aux très courtes distances ($r < 10^{-12}$ cm), il faudrait tenir compte en outre des forces de type « nucléaire », qui sont associées à des champs « mésoniques » dont les particules caractéristiques auraient, elles, des masses beaucoup plus élevées que celle de l'électron ($\mu_0 \# 274\ m$ pour le méson π), conséquence de très faible rayon d'action de ces forces.

Manuscrit reçu le 22 mars 1957.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Voir par exemple : KENNARD (E. H.), Kinetic Theory of Gases, pp. 115-124 (McGraw-Hill, 1938). BERTHELOT (A.), Rayonnements des particules atomiques, électrons et photons, ch. II (Masson, 1956).
[2] BAYET (M.), DELCROIX (J. L.) et DENISSE (J. F.), *J. Physique Rad.*, 1954, **15**, 795 ; 1955, **16**, 274 ; 1956, **17**, 923 et 1008.
[3] DEBYE (P.) et HUECKEL (E.), *Physik Z.*, 1923, **24**, 185.
[4] BAYET (M.), Physique électronique des gaz et des solides, ch. IV (Masson, sous presse).
[5] Cf. SPITZER (L.), Physics of fully ionized Gases, ch. V (Interscience, 1956).
[6] MACDONALD (A. D.) et BROWN (S. C.), *Phys. Rev.*, 1949, **75**, 411.

SPINEURS DU SECOND RANG À COMPOSANTES INVARIANTES ET FORMALISME SPINORIEL INCLUANT LES PARITÉS.

Par J. WINOGRADZKI,
Institut Henri-Poincaré, Paris.

I. — Les spineurs ([1]) du second rang dont les composantes sont invariantes par rapport au groupe de Lorentz général présentent un grand intérêt.

Des formes bilinéaires construites à l'aide de ces spineurs jouent un rôle important en Physique (par exemple dans la théorie de la désintégration radioactive β). La connaissance de ces spineurs permet une classification naturelle des spineurs du premier rang — classification dont l'intérêt est lié à l'existence de particules de spin 1/2 de nature différente. S'il est possible de définir une métrique spinorielle, les spineurs métriques seront des spineurs à composantes invariantes. Enfin, la connaissance de l'ensemble des spineurs du second rang à composantes invariantes permet de rendre le formalisme spinoriel de la Physique plus satisfaisant. D'importantes équations spinorielles ne relient, en effet, que les valeurs des composantes spinorielles. Contrairement à des équations tensorielles ou semi-spinorielles, elles ne relient point les variances. (On se rend aisément compte que ce n'est pas simplement une question de notations.) Ces équations contiennent des matrices numériques. On fausse évidemment le formalisme en considérant comme matrice numérique une grandeur à 16 composantes, même si les composantes de cette grandeur sont invariantes par rapport au groupe de Lorentz général. Or, les éléments des matrices numériques qui jouent un rôle fondamental dans la théorie des particules élémentaires sont les composantes, invariantes, de certains spineurs du second rang. En remplaçant ces matrices par les spineurs correspondants, on obtient un formalisme spinoriel dont les équations relient bien les variances, y compris les parités relatives.

II. — Pour déterminer les spineurs du second rang à composantes invariantes par rapport au groupe de Lorentz général, deux méthodes pouvaient être envisagées.

1) W. Pauli a établi des relations entre certaines matrices numériques et la matrice de transformation spinorielle [1]. On pourrait chercher à déduire de ces équations l'invariance des composantes de certains spineurs.

2) On peut utiliser la méthode directe : déterminer les spineurs à composantes invariantes en résolvant les équations d'invariance. (Le nombre d'équations d'invariance à résoudre pourra être notablement réduit par une discussion préalable.) Cette méthode présente divers avantages. D'abord, du point de vue épistémologique, elle est beaucoup plus satisfaisante. Elle est aussi plus aisée, car on obtient automatiquement tous les spineurs du second rang à composantes invariantes. Enfin, en utilisant cette méthode, on obtient, en plus, tous les spineurs du second rang à composantes invariantes par rapport au groupe des retournements $x^k = \pm x'^k$.

C'est donc la seconde méthode que nous avons adoptée.

Un chapitre préliminaire (chap. I) contient un bref rappel des lois de transformation spinorielles, une classification des variances spinorielles et la définition de notations spinorielles explicites.

([1]) Nous appelons « spineurs » les spineurs de Dirac, c'est-à-dire les spineurs à 4ⁿ composantes de l'Univers de Minkoswki.

Chapitre I

Définition des variances spinorielles. Notations.

§ 1. **La matrice de transformation spinorielle.** — La matrice de transformation spinorielle classique (S) est une matrice à quatre lignes et quatre colonnes définie par les deux conditions suivantes :

1) S satisfait à l'équation

$$\gamma^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} S \gamma^k S^{-1}. \quad (1.1)$$

x^i et x'^i sont deux systèmes de référence orthonormaux. γ^i sont des matrices de Dirac, c'est-à-dire quatre matrices à quatre lignes et quatre colonnes telles que

$$\frac{1}{2}(\gamma^i \gamma^k + \gamma^k \gamma^i) = \delta^{ik}. \quad (1.2)$$

(Les indices latins prendront toujours les valeurs 1 à 4. Les indices prenant les valeurs 1 à 3 seront désignés par des lettres grecques.)

Cette première condition détermine S à un coefficient arbitraire près.

2) S donne une représentation monovalente du groupe de Lorentz infinitésimal.

§ 2. **Trois types de variance.** — 1) Initialement, un spineur de Dirac du premier rang était défini comme une matrice de colonne de quatre éléments dont la loi de transformation s'écrit

$$\Psi = S\Psi'. \tag{2.1}$$

Cette définition a été élargie par la suite [2].

Nous appellerons spineurs du premier rang les matrices de colonne de quatre éléments dont la loi de transformation se déduit de (2.1) par une opération matricielle classique. Cet élargissement de la définition est nécessaire pour que toutes les grandeurs du formalisme spinoriel qui ne sont pas des tenseurs soient des spineurs ou des grandeurs à variances tensorielles et spinorielles.

Les opérations matricielles classiques transforment une matrice non singulière A en l'une des matrices suivantes :

$$A, \quad \tilde{A}^{-1}, \quad \overset{*}{A}, \quad \overset{+}{A}^{-1}, \tag{2.I}$$

$$A^{-1}, \quad \tilde{A}, \quad \overset{*}{A}^{-1}, \quad \overset{+}{A}. \tag{2.II}$$

L'accent circonflexe désignant une quelconque de ces opérations matricielles, on a, pour une opération (2.I).

$$\widehat{XY} = \hat{X}\hat{Y} \tag{2.2}$$

et, pour une opération (2.II),

$$\widehat{XY} = \hat{Y}\hat{X}. \tag{2.3}$$

Ainsi, en soumettant l'équation (2.1) à une opération matricielle (2.II), on transforma la matrice de colonne Ψ en matrice de ligne ; les opérations (2.I) par contre transforment bien Ψ en une nouvelle matrice de colonne. Les équations de transformation des spineurs du premier rang s'écrivent donc

$$\Psi = S\Psi', \qquad \Psi = \tilde{S}^{-1}\Psi',$$
$$\Psi = \overset{*}{S}\Psi', \qquad \Psi = \overset{+}{S}^{-1}\Psi' \tag{2.4}$$

ou, en notation indicielle,

$$\Psi^k = S^k_m \Psi'^m, \qquad \Psi_k = (S^{-1})^m_k \Psi'_m,$$
$$\Psi^{\dot{k}} = \overset{*}{S}{}^{\dot{k}}_{\dot{m}} \Psi'^{\dot{m}}, \qquad \Psi_{\dot{k}} = (\overset{*}{S}{}^{-1})^{\dot{m}}_{\dot{k}} \Psi'_{\dot{m}}. \tag{2.5}$$

La forme indicielle des lois de transformation met en évidence l'analogie avec les semi-spineurs de Van der Waerden [3].

Pour alléger le langage, nous dirons que deux spineurs dont les indices occupent la même position sont de même « locovariance » et que deux spineurs dont les indices sont tous les deux non pointés ou tous les deux pointés sont de même « plexivariance ». Ψ^k et Ψ_k par exemple sont de même plexivariance, de locovariances différentes.

Pour une rotation [2], la matrice S est déterminée au signe près. La donnée de la locovariance et de la plexivariance détermine donc la loi de transformation d'un spineur du premier rang, pour une rotation, au signe près.

2) Pour une transformation de Lorentz qui n'est pas une rotation, la matrice S peut prendre deux valeurs, déterminées chacune au signe près [4], [6]. Pour

$$x^i = -x'^i, \quad x^k = x'^k, \quad x^m = x'^m, \quad x^p = x'^p$$
$$(i \neq k \neq m \neq p) \tag{2.6}$$

on a

$$S = \pm R_i \gamma^k \gamma^m \gamma^p \tag{2.7}$$

avec

$$R_i = 1 \quad \text{ou} \quad R_i = i. \tag{2.8}$$

Dans l'Univers de Minkovski,

$$R_1 = R_2 = R_3 \;(= R_\alpha), \tag{2.9}$$

R_4 étant indépendant de R_α. Nous dirons que R_α et R_4 déterminent les « flectovariances » spatiales et temporelles des spineurs.

La donnée de la locovariance, de la plexivariance et des deux flectovariances détermine, au signe près, la loi de transformation d'un spineur du premier rang pour tout le groupe de Lorentz.

Nous ne contracterons que des indices de mêmes flectovariances.

Notations. — La valeur de R_α caractérisant un spineur du premier rang sera placée au-dessous de ce spineur, celle de R_4 au-dessus. La généralisation de cette notation à des spineurs de rang quelconque est immédiate. Pour alléger l'écriture, le spineur du second rang $\underset{R_\alpha R_\alpha}{\overset{R_4 R_4}{\chi}}$ sera écrit $\underset{R_\alpha}{\overset{R_4}{\chi}}$.

§ 3. **Parités.** — Considérons maintenant un ensemble de spineurs du premier rang. Pour une rotation, le signe de la matrice S, tout en étant arbitraire, est le même pour tous les spineurs puisque, par définition, toute rotation peut être réalisée par une suite de transformation infinitésimales. Par contre, pour une transformation de Lorentz qui ne peut pas être réalisée par une suite de transformations infinitésimales, les signes de la matrice S figurant dans les lois de transformation de deux spineurs du premier rang sont indépendants, ce qui conduit à la notion de parité. S. Watanabe a montré que les parités spatiale et temporelle sont indépendantes [7]. Deux spineurs du premier rang peuvent donc avoir quatre parités relatives.

Un spineur de rang supérieur à un se transforme, par définition, comme un produit de spineurs de

[2] Nous appelons « rotations » les transformations du groupe de Lorentz continu. (« Rotations propres » dans la terminologie d'E. Cartan [4], « Transformations de Lorentz orthochrones propres » dans celle de H. J. Bhabha [5].)

rang un. La loi de transformation d'un spineur de rang supérieur à un dépend donc des parités relatives des indices (« parités internes »).

La donnée des locovariances, plexivariances, flectovariances et des parités internes détermine la loi de transformation d'un spineur de rang n, pour tout le groupe de Lorentz, complètement si n est pair et au signe près si n est impair.

Notations. — Quatre spineurs du premier rang de mêmes flectovariances spatiale et temporelle et de parités différentes s'écriront

$$\underset{(+)}{\overset{(+)}{\Psi}}, \quad \underset{(+)}{\overset{(-)}{\Psi}}, \quad \underset{(-)}{\overset{(+)}{\Psi}}, \quad \underset{(-)}{\overset{(-)}{\Psi}} \tag{3.I}$$

Les signes inférieurs indiquent les parités spatiales, les signes supérieurs les parités temporelles. Les parités sont les mêmes si les signes sont pareils, elles sont opposées si les signes sont différents. Par exemple, les spineurs $\underset{(-)}{\overset{(+)}{\Psi}}$ et $\underset{(-)}{\overset{(-)}{\Psi}}$ sont de mêmes parités spatiales et de parités temporelles opposées. Les parenthèses doivent rappeler que les parités ne sont que relatives : les signes placés au-dessous et au-dessus d'un quelconque des quatre spineurs sont arbitraires, mais ils déterminent tous les autres.

La parités internes spatiale et temporelle d'un spineur du second rang dont les deux indices sont de mêmes flectovariances seront désignés par des signes, sans parenthèses, placés au-dessous et au-dessus du spineur. Ainsi, par exemple,

$$\underset{(-)}{\overset{(+)}{\Psi}} \; \underset{(-)}{\overset{(-)}{\Psi}} = \underset{+}{\overset{-}{\chi}}. \tag{3.1}$$

D'une manière générale, si tous les indices spinoriels figurant dans une équation sont de mêmes flectovariances, les règles de signes algébriques sont valables. On a

$$(+)\,(+) = (-)\,(-) = +, \qquad (+)\,(-) = (-)\,(+) = - \tag{3.2}$$

et, pour la multiplication intérieure,

$$+\,(+) = -\,(-) = (+), \qquad +\,(-) = -\,(+) = (-) \tag{3.3}$$

Chapitre II

Les équations d'invariance.

§ 4. Classification des spineurs du second rang.

— Considérons d'abord les locovariances et les plexivariances. Il y a en tout, pour un spineur du second rang, 16 variances possibles. Groupons-les en 4 classes :

Spineurs N. — $N^{k}{}_{m}$, $N^{\dot{k}}{}_{\dot{m}}$, $N_{k}{}^{m}$, $N_{\dot{k}}{}^{\dot{m}}$;
Spineurs L. — L_{km}, $L_{\dot{k}\dot{m}}$, L^{km}, $L^{\dot{k}\dot{m}}$; (4.I)
Spineurs P. — $P^{\dot{k}}{}_{m}$, $P^{k}{}_{\dot{m}}$, $P_{\dot{k}}{}^{m}$, $P_{k}{}^{\dot{m}}$;
Spineurs M. — $M_{\dot{k}m}$, $M_{k\dot{m}}$, $M^{\dot{k}m}$, $M^{k\dot{m}}$.

On est conduit à cette même classification en adoptant trois points de vue différents :

1) Formellement, chaque classe peut être caractérisée par la nature relative des deux indices spinoriels : les deux indices peuvent être de locovariances différentes et de mêmes plexivariances (N), de mêmes locovariances et de mêmes plexivariances (L), de locovariances différentes et de plexivariances différentes (P), de mêmes locovariances et de plexivariances différentes (M).

2) Si l'on considère les spineurs du second rang comme des opérateurs agissant sur des spineurs du premier rang (en particulier, comme des spineurs « métriques »), chaque classe peut être caractérisée par la nature du résultat obtenu : les spineurs N ne changent ni la locovariance ni la plexivariance, les spineurs L changent la locovariance, les spineurs P la plexivariance, les spineurs M changent à la fois la locovariance et le plexivariance.

3) Chaque classe peut être caractérisée par une opération matricielle (2.II), opération qui laisse inchangée les variances des spineurs de cette classe : sont de mêmes variances N et N^{-1}, L et $\bar{\bar{L}}$, P et $\overset{*}{P}{}^{-1}$, M et $\overset{+}{M}$.

En appliquant à un spineur du second rang une opération matricielle classique, on obtient un spineur appartenant à la même classe. Inversement, tous les changements de variance dans le cadre d'une classe peuvent être réalisés par ces opérations matricielles. Donc, si l'on connaît tous les spineurs du second rang à composantes invariantes d'une seule variance ([3]), il est aisé d'en déduire tous les spineurs à composantes invariantes appartenant à la même classe. Remarquons qu'en appliquant à un spineur du second rang une opération matricielle classique, on ne modifie pas ses flectovariances ; les parités internes d'un spineur dont les deux indices sont de mêmes flectovariances restent également inchangées.

Par rapport à la multiplication intérieure, les spineurs N, L, P, M forment un groupe, le groupe de Klein :

	N	L	P	M
N	N	L	P	M
L	L	N	M	P
P	P	M	N	L
M	M	P	L	N

(4.II)

Donc, si l'on connaît les spineurs à composantes invariantes de deux classes autres que N, on en déduit aisément tous les spineurs à composantes invariantes. Mais pour des raisons qui apparaîtront plus loin, l'étude simultanée des quatre classes est préférable.

Nous calculerons directement, c'est-à-dire en résolvant les équations d'invariance, les spineurs à composantes invariantes dont le second ndice est covariant non pointé. Ce sont les spineurs à

([3]) Rappelons que nous ne considérons ici que les locovariances et les plexivariances.

second indice covariant non pointé qui, seuls, seront désignés dorénavant par N, L, P, M.

§ 5. **Formation des équations d'invariance.** — Les équations de transformation des spineurs N, L, P, M s'écrivent :

$$N = \varepsilon S N' S^{-1} \quad (5.1)$$

$$L = \varepsilon \tilde{S}^{-1} L' S^{-1} \quad (5.2)$$

$$P = \varepsilon \overset{*}{S} P' S^{-1} \quad (5.3)$$

$$M = \varepsilon \overset{+}{S}^{-1} M' S^{-1}. \quad (5.4)$$

Pour les rotations $\varepsilon = 1$. Pour les retournements $\varepsilon = \pm 1$ si les deux indices du spineur considéré sont de même flectovariance, $\varepsilon = \pm i$ si les deux indices sont de flectovariances différentes ; le signe dépend des parités internes.

Les composantes des spineurs N, L, P, M sont donc invariantes par rapport à la transformation de coordonnées dont la représentation spinorielle est S, si

$$NS = \varepsilon SN \quad (5.5)$$

$$LS = \varepsilon \tilde{S}^{-1} L \quad (5.6)$$

$$PS = \varepsilon \overset{*}{S} P \quad (5.7)$$

$$MS = \varepsilon \overset{+}{S}^{-1} M. \quad (5.8)$$

§ 6. **Les quatre matrices numériques associées aux quatre classes de spineurs.** — Les équations d'invariance (5.5) à (5.8) ne contiennent en dehors des spineurs invariants eux-mêmes et de coefficients numériques que les matrices S, $\tilde{S}^{-1}$, $\overset{*}{S}$, $\overset{+}{S}^{-1}$. La matrice S est un polynôme en γ^k. Les matrices $\tilde{S}^{-1}$, $\overset{*}{S}$, $\overset{+}{S}^{-1}$ sont donc des polynômes en $(\tilde{\gamma}^k)^{-1} = \tilde{\gamma}^k$, $\overset{*}{\gamma}^k$, $(\overset{+}{\gamma}^k)^{-1} = \overset{+}{\gamma}^k$.

Posons

$$\gamma^k = I \gamma^k I^{-1} \quad (6.1)$$

$$\tilde{\gamma}^k = B \gamma^k B^{-1} \quad (6.2)$$

$$\overset{*}{\gamma}^k = C \gamma^k C^{-1} \quad (6.3)$$

$$\overset{+}{\gamma}^k = A \gamma^k A^{-1}. \quad (6.4)$$

Ces équations déterminent les matrices I, B, C, A à un coefficient arbitraire près [1]. La matrice I est proportionnelle à la matrice unité. (La définition de C n'est pas la définition habituelle.)

Pour pouvoir résoudre les équations d'invariance simultanément, désignons par Q les spineurs du second rang dont le second indice est covariant non pointé et par D les matrices numériques I, B, C, A. Dans tout ce qui suit, un spineur Q et une matrice D figurant dans une même équation appartiendront, par définition, à une même colonne du tableau suivant :

Q	N	L	P	M
D	I	B	C	A

(6.I)

L'opération matricielle qui laisse inchangée la variance d'un spineur Q (opération caractéristique de la classe à laquelle appartient Q) transforme la matrice D correspondante en matrice proportionnelle.

Chapitre III

Spineurs à composantes invariantes par rapport au groupe des retournements $x^k = \pm x'^k$.

§ 7. **Les matrices S, $\tilde{S}^{-1}$, $\overset{*}{S}$, $\overset{+}{S}^{-1}$.** — Dans les équations d'invariance (5.5) à (5.8) figurent les matrices S, $\tilde{S}^{-1}$, $\overset{*}{S}$, $\overset{+}{S}^{-1}$. Pour le retournement de l'axe x^i, la matrice S est donnée par les équations (2.7) et (2.8). On a donc ;

si $R_i = 1$,

$$\left.\begin{aligned}
&(7.1) & S &= \pm \gamma^k \gamma^m \gamma^p = \pm I \gamma^k \gamma^m \gamma^p I^{-1} \\
&(7.2) & \tilde{S}^{-1} &= \pm \tilde{\gamma}^k \tilde{\gamma}^m \tilde{\gamma}^p = \pm B \gamma^k \gamma^m \gamma^p B^{-1} \\
&(7.3) & \overset{*}{S} &= \pm \overset{*}{\gamma}^k \overset{*}{\gamma}^m \overset{*}{\gamma}^p = \pm C \gamma^k \gamma^m \gamma^p C^{-1} \\
&(7.4) & \overset{+}{S}^{-1} &= \pm \overset{+}{\gamma}^k \overset{+}{\gamma}^m \overset{+}{\gamma}^p = \pm A \gamma^k \gamma^m \gamma^p A^{-1}
\end{aligned}\right\} = \pm D \gamma^k \gamma^m \gamma^p D^{-1}$$

si $R_i = i$,

$$\left.\begin{aligned}
&(7.5) & S &= \pm i \gamma^k \gamma^m \gamma^p = \pm i I \gamma^k \gamma^m \gamma^p I^{-1} \\
&(7.6) & \tilde{S}^{-1} &= \mp i \tilde{\gamma}^k \tilde{\gamma}^m \tilde{\gamma}^p = \mp i B \gamma^k \gamma^m \gamma^p B^{-1} \\
&(7.7) & \overset{*}{S} &= \mp i \overset{*}{\gamma}^k \overset{*}{\gamma}^m \overset{*}{\gamma}^p = \mp i C \gamma^k \gamma^m \gamma^p C^{-1} \\
&(7.8) & \overset{+}{S}^{-1} &= \pm i \overset{+}{\gamma}^k \overset{+}{\gamma}^m \overset{+}{\gamma}^p = \pm i A \gamma^k \gamma^m \gamma^p A^{-1}
\end{aligned}\right\} = \pm \eta i D \gamma^k \gamma^m \gamma^p D^{-1}$$

avec $\eta = 1$ ou $\eta = -1$.

§ 8. **Spineurs à $R_\alpha \neq R'_\alpha$ ou $R_4 \neq R'_4$.** — Il n'existe pas de spineurs du second rang à indices de flectovariances différentes dont les composantes soient invariantes par rapport aux retournements.

En effet, si les deux indices de Q sont de flectovariances différentes par rapport au retournement de l'axe x^i, les équations d'invariance (5.5) à (5.8) s'écrivent :

$$Q.\gamma^k \gamma^m \gamma^p = \pm iD\gamma^k \gamma^m \gamma^p D^{-1}.Q \quad (8.1)$$

ou

$$\gamma^k \gamma^m \gamma^p = \pm i(Q^{-1} D) \gamma^k \gamma^m \gamma^p (Q^{-1} D)^{-1}. \quad (8.2)$$

En élevant au carré, on obtient $-1 = 1$.

§ 9. **Spineurs** $\overset{1}{\underset{1}{Q}}$. — Le calcul de $\overset{1}{\underset{1}{Q}}$ est plus rapide que celui de $\overset{i}{\underset{1}{Q}}$, $\overset{1}{\underset{i}{Q}}$ ou $\overset{i}{\underset{i}{Q}}$ parce qu'il ne fait pas intervenir η.

Pour $\overset{1}{\underset{1}{Q}}$, les équations d'invariance (5.5) à (5.8) s'écrivent :

$$\overset{1}{\underset{1}{Q}}.\gamma^k \gamma^m \gamma^p = \varepsilon_i D\gamma^k \gamma^m \gamma^p D^{-1}.\overset{1}{\underset{1}{Q}} \quad (9.1)$$

ou

$$D^{-1}\overset{1}{\underset{1}{Q}}.\gamma^k \gamma^m \gamma^p = \varepsilon_i \gamma^k \gamma^m \gamma^p.D^{-1}\overset{1}{\underset{1}{Q}} \quad (9.2)$$

avec $\varepsilon_i = \pm 1$, le signe dépendant des deux parités internes.

Quatre cas sont à distinguer.

1) $\overset{1}{\underset{1}{Q}} = \overset{1+}{\underset{1+}{Q}}$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 1.$$

D'après (9.2), $D^{-1} \overset{1+}{\underset{1+}{Q}}$ commute avec tous les $\gamma^k \gamma^m \gamma^p$. Donc

$$D^{-1} \overset{1+}{\underset{1+}{Q}} = I, \quad (9.3)$$

d'où

$$\boxed{\overset{1+}{\underset{1+}{Q}} = D.} \quad (9.3')$$

2) $\overset{1}{\underset{1}{Q}} = \overset{1-}{\underset{1-}{Q}}$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = -1.$$

D'après (9.2), $D^{-1} \overset{1-}{\underset{1-}{Q}}$ anticommute avec tous les $\gamma^k \gamma^m \gamma^p$. Donc

$$D^{-1} \overset{1-}{\underset{1-}{Q}} = \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^4, \quad (9.4)$$

d'où

$$\boxed{\overset{1-}{\underset{1-}{Q}} = D\gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^4.} \quad (9.4')$$

3) $\overset{1}{\underset{1}{Q}} = \overset{1-}{\underset{1+}{Q}}$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 1, \qquad \varepsilon_4 = -1.$$

D'après (9.2), $D^{-1} \overset{1-}{\underset{1+}{Q}}$ commute avec tous les $\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^4$ et anticummoute avec $\gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$. Donc

$$D^{-1} \overset{1-}{\underset{1+}{Q}} = \gamma^4, \quad (9.5)$$

d'où

$$\boxed{\overset{1-}{\underset{1+}{Q}} = D\gamma^4.} \quad (9.5')$$

4) $\overset{1}{\underset{1}{Q}} = \overset{1+}{\underset{1-}{Q}}$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -1, \qquad \varepsilon_4 = 1.$$

D'après (9.2), $D^{-1} \overset{1+}{\underset{1-}{Q}}$ anticommute avec tous les $\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^4$ et commute avec $\gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$. Donc

$$D^{-1} \overset{1-}{\underset{1+}{Q}} = \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3, \quad (9.6)$$

d'où

$$\boxed{\overset{1+}{\underset{1-}{Q}} = D\gamma^1 \gamma^2 \gamma^3.} \quad (9.6')$$

§ 10. **Autres spineurs.** — Si $\underset{1}{A}$ et $\underset{i}{A}$ sont deux spineurs du second rang obéissant aux mêmes lois de transformation pour les rotations (c'est-à-dire deux spineurs de mêmes locovariances et de mêmes plexivariances), on a

$$\underset{1\pm}{A} \sim \underset{i\pm}{A} \qquad \text{ou} \qquad \underset{1\pm}{A} \sim \underset{i\mp}{A}, \quad (10.1)$$

tilda signifiant que les deux spineurs obéissent aux mêmes lois de transformation pour tout le groupe de Lorentz. La même relation est satisfaite pour les flectovariances temporelles.

Pour les spineurs Q (spineurs ayant un indice de locovariance et de plexivariance déterminées), deux cas sont à distinguer.

1) *Spineurs N et M* :

$$\underset{1\pm}{Q} \sim \underset{i\pm}{Q}. \quad (10.2)$$

Donc

$$\boxed{\overset{1\pm}{\underset{1\pm}{Q}} \sim \overset{i\pm}{\underset{1\pm}{Q}} \sim \overset{1\pm}{\underset{i\pm}{Q}} \sim \overset{i\pm}{\underset{i\pm}{Q}}.} \quad (10.3)$$

2) *Spineurs L et P* :

$$\underset{1\pm}{Q} \sim \underset{i\mp}{Q}. \qquad (10.4)$$

Donc

$$\boxed{\overset{1\pm}{\underset{1\pm}{Q}} \sim \overset{i\mp}{\underset{1\pm}{Q}} \sim \overset{1\pm}{\underset{i\mp}{Q}} \sim \overset{i\mp}{\underset{i\mp}{Q}}.} \qquad (10.5)$$

Enfin, les spineurs du second rang à composantes invariantes par rapport au groupe des retournements $x^k = \pm x'^k$ dont le second indice n'est pas covariant non pointé, se déduisent des spineurs Q invariants par une opération matricielle classique. Rappelons que ces opérations ne modifient que les locovariances et les plexivariances des spineurs considérés ; elles laissent inchangées leurs flectovariances et leurs parités internes.

Chapitre IV

Spineurs à composantes invariantes par rapport au groupe des rotations.

§ 11. **Les matrices S, $\tilde{S}^{-1}$, $\overset{*}{S}$, $\overset{+}{S}^{-1}$.** — Toute rotation peut être réalisée par une suite de rotations laissant fixes deux axes orthogonaux. Les composantes d'une grandeur sont donc invariantes par rapport aux rotations, si elles le sont par rapport aux rotations dans un plan de coordonnées quelconque.

Pour une rotation de l'angle θ laissant fixes les axes de coordonnées autres que x^k et x^m,

$$S = \cos\frac{\theta}{2} - \gamma^k \gamma^m \sin\frac{\theta}{2} \qquad (k \neq m). \qquad (11.1)$$

Calculons les matrices $\tilde{S}^{-1}$, $\overset{*}{S}$, $\overset{+}{S}^{-1}$ qui figurent dans les équations d'invariance (5.6) à (5.8). En tenant compte du fait que l'angle θ est réel si k et m sont différents de 4 et imaginaires si k ou m est égal à 4, on obtient

$$(11.2) \qquad S = \cos\frac{\theta}{2} - \gamma^k \gamma^m \sin\frac{\theta}{2} = \cos\frac{\theta}{2} - I\gamma^k \gamma^m I^{-1} \sin\frac{\theta}{2}$$

$$(11.3) \qquad \tilde{S}^{-1} = \cos\frac{\theta}{2} - \tilde{\gamma}^k \tilde{\gamma}^m \sin\frac{\theta}{2} = \cos\frac{\theta}{2} - B\gamma^k \gamma^m B^{-1} \sin\frac{\theta}{2}$$

$$\Bigg\} = \cos\frac{\theta}{2} - D\gamma^k \gamma^m D^{-1} \sin\frac{\theta}{2}$$

$$(11.4) \qquad \overset{*}{S} = \cos\frac{\theta}{2} - \varepsilon_{km} \overset{*}{\gamma}{}^k \overset{*}{\gamma}{}^m \sin\frac{\theta}{2} = \cos\frac{\theta}{2} - \varepsilon_{km}\, C\gamma^k \gamma^m C^{-1} \sin\frac{\theta}{2}$$

$$(11.5) \qquad \overset{+}{S}{}^{-1} = \cos\frac{\theta}{2} - \varepsilon_{km} \overset{+}{\gamma}{}^k \overset{+}{\gamma}{}^m \sin\frac{\theta}{2} = \cos\frac{\theta}{2} - \varepsilon_{km}\, A\gamma^k \gamma^m A^{-1} \sin\frac{\theta}{2}$$

$$\Bigg\} = \cos\frac{\theta}{2} - \varepsilon_{km}\, D\gamma^k \gamma^m D^{-1} \sin\frac{\theta}{2}.$$

avec

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = 1, \qquad \varepsilon_{\alpha 4} = \varepsilon_{4\alpha} = -1.$$

Ainsi, tandis que l'on a pu déterminer simultanément tous les spineurs Q dont les composantes sont invariantes par rapport aux retournements des axes, on voit qu'ici deux cas sont à distinguer.

§ 12. **Spineurs à indices de même plexivariance.** — Les équations d'invariance (5.5) et (5.6) s'écrivent :

$$Q\left(\cos\frac{\theta}{2} - \gamma^k \gamma^m \sin\frac{\theta}{2}\right) = \left(\cos\frac{\theta}{2} - D\gamma^k \gamma^m D^{-1} \sin\frac{\theta}{2}\right) Q \qquad (12.1)$$

ou

$$D^{-1} Q . \gamma^k \gamma^m = \gamma^k \gamma^m . D^{-1} Q. \qquad (12.2)$$

Ainsi, $D^{-1} Q$ commute avec tous les $\gamma^k \gamma^m$. Donc

$$D^{-1} Q = \lambda I + \mu \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^4 \qquad (12.3)$$

d'où

$$\boxed{Q = \lambda D + \mu D \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^4} \qquad (12.3')$$

λ et μ étant des paramètres quelconques.

Les autres spineurs du second rang à indices de même plexivariance dont les composantes sont invariantes par rapport au groupe des rotations se déduisent des spineurs N et L invariants par une opération matricielle classique.

§ 13. **Spineurs à indices de plexivariances différentes.** — Les équations d'invariance (5.7) et (5.8) s'écrivent :

$$Q\left(\cos\frac{\theta}{2} - \gamma^k \gamma^m \sin\frac{\theta}{2}\right) = \left(\cos\frac{\theta}{2} - \varepsilon_{km}\, D\gamma^k \gamma^m D^{-1} \sin\frac{\theta}{2}\right) Q \qquad (13.1)$$

ou

$$D^{-1} Q . \gamma^k \gamma^m = \varepsilon_{km}\, \gamma^k \gamma^m . D^{-1} Q. \qquad (13.2)$$

Ainsi, $D^{-1} Q$ commute avec tous les $\gamma^\alpha \gamma^\beta$ et anticommute avec tous les $\gamma^\alpha \gamma^4$. Donc

$$D^{-1} Q = \lambda \gamma^4 + \mu \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \qquad (13.3)$$

d'où

$$\boxed{Q = \lambda D\gamma^4 + \mu D\gamma^1\gamma^2\gamma^3} \qquad (13.3')$$

λ et μ étant comme précédemment des paramètres quelconques.

Les autres spineurs du second rang à indices de plexivariances différentes dont les composantes sont invariantes par rapport au groupe des rotations se déduisent des spineurs P et M invariants par une opération matricielle classique.

Chapitre V

Spineurs à composantes invariantes par rapport au groupe de Lorentz général. Formalisme spinoriel explicite.

§ 14. **Les matrices numériques fondamentales.** — Les composantes d'un spineur sont invariantes par rapport au groupe de Lorentz général, si elles sont invariantes par rapport au sous-groupe des retournements $x^k = \pm x'^k$ et par rapport au sous-groupe des rotations. Les spineurs Q à composantes invariantes par rapport au groupe de Lorentz général sont donc données par les équations (12.3′) et (13.3′), l'un des deux paramètres λ, μ étant nul. Tous les spineurs Q à composantes invariantes par rapport au groupe de Lorentz général étant égaux à D, $D\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4$, $D\gamma^4$, $D\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, posons :

$$D\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4 = D_U, \qquad (14.1)$$

$$D\gamma^4 = D_E, \qquad (14.2)$$

$$D\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = D_T. \qquad (14.3)$$

Au lieu de définir les matrices D_U, D_E, D_T à partir des matrices D, on peut les définir directement. Posons en effet

$$D\gamma^k D^{-1} = \widehat{\gamma}^k. \qquad (14.4)$$

Les matrices D_U, D_E, D_T sont déterminées, à un coefficient arbitraire près comme les matrices D elles-mêmes, par les équations

$$D_U\gamma^k D_U^{-1} = -\widehat{\gamma}^k \qquad (14.5)$$

$$\left.\begin{aligned} D_E\gamma^\alpha D_E^{-1} &= -\widehat{\gamma}^\alpha \qquad (14.6a)\\ D_E\gamma^4 D_E^{-1} &= \widehat{\gamma}^4 \qquad (14.6b)\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} D_T\gamma^\alpha D_T^{-1} &= \widehat{\gamma}^\alpha \qquad (14.7a)\\ D_T\gamma^4 D_T^{-1} &= -\widehat{\gamma}^4. \qquad (14.7b)\end{aligned}\right\}$$

§ 15. **Spineurs à composantes invariantes.** — Écrivons explicitement tous les spineurs Q à composantes invariantes par rapport au groupe de Lorentz général :

$$\overset{1+}{\underset{1+}{N}}{}^k{}_m = \overset{i+}{\underset{1+}{N}}{}^k{}_m = \overset{1+}{\underset{i+}{N}}{}^k{}_m = \overset{i+}{\underset{i+}{N}}{}^k{}_m = I \qquad (15.1)$$

$$\overset{1-}{\underset{1-}{N}}{}^k{}_m = \overset{i-}{\underset{1-}{N}}{}^k{}_m = \overset{1-}{\underset{i-}{N}}{}^k{}_m = \overset{i-}{\underset{i-}{N}}{}^k{}_m = I_U \qquad (15.2)$$

$$\overset{1+}{\underset{1+}{L}}{}_{km} = \overset{i-}{\underset{1+}{L}}{}_{km} = \overset{1+}{\underset{i-}{L}}{}_{km} = \overset{i-}{\underset{i-}{L}}{}_{km} = B \qquad (15.3)$$

$$\overset{1-}{\underset{1-}{L}}{}_{km} = \overset{i+}{\underset{1-}{L}}{}_{km} = \overset{1-}{\underset{i+}{L}}{}_{km} = \overset{i+}{\underset{i+}{L}}{}_{km} = B_U \qquad (15.4)$$

$$\overset{1-}{\underset{1+}{P}}{}^{\dot k}{}_m = \overset{i+}{\underset{1+}{P}}{}^{\dot k}{}_m = \overset{1-}{\underset{i-}{P}}{}^{k}{}_m = \overset{i+}{\underset{i-}{P}}{}^{\dot k}{}_m = C_E. \qquad (15.5)$$

$$\overset{1+}{\underset{1-}{P}}{}^k{}_{\dot m} = \overset{i-}{\underset{1-}{P}}{}^k{}_{\dot m} = \overset{1+}{\underset{i+}{P}}{}^k{}_{\dot m} = \overset{i-}{\underset{i+}{P}}{}^k{}_{\dot m} = C_T \qquad (15.6)$$

$$\overset{1-}{\underset{1+}{M}}{}_{\dot k m} = \overset{i-}{\underset{1+}{M}}{}_{\dot{}\, m} = \overset{1-}{\underset{i+}{M}}{}_{\dot k m} = \overset{i-}{\underset{i+}{M}}{}_{\dot k m} = A_E, \qquad (15.7)$$

$$\overset{1+}{\underset{1-}{M}}{}_{\dot k m} = \overset{i+}{\underset{1-}{M}}{}_{\dot k m} = \overset{1+}{\underset{i-}{M}}{}_{\dot k m} = \overset{i+}{\underset{i-}{M}}{}_{\dot k m} = A_T. \qquad (15.8)$$

Les autres spineurs du second rang à composantes invariantes par rapport au groupe de Lorentz général se déduisent des spineurs (15.1) à (15.8) par des opérations matricielles classiques. Tous les spineurs du second rang à composantes invariantes se déduisant les uns des autres par des opérations matricielles sont de mêmes flectovariances et de mêmes parités internes.

Ainsi, à un coefficient arbitraire près, il existe 128 spineurs du second rang dont les composantes sont invariantes par rapport au groupe de Lorentz général ; 32 seulement sont distincts. Remarquons qu'il n'existe pas de spineurs du second rang à composantes invariantes de n'importe quelle variance.

§ 16. **Formalisme explicite.** — A titre d'exemple, écrivons explicitement une équation spinorielle très simple, mais contenant une « matrice numérique » classique, telle l'équation

$$B\Psi = \Phi. \qquad (16.1)$$

Les éléments de la matrice B sont bien les composantes d'un spineur, les variances étant données par (15.3). Ψ est un spineur du premier rang au sens habituel (c'est-à-dire un spineur contravariant non pointé). Quatre cas sont à distinguer corres-

pondant aux quatre flectovariances des spineurs du premier rang :

$$\underset{1+}{\overset{1+}{B}}_{km} \; \underset{1(+)}{\overset{1(+)}{\Psi}}{}^{m} = \underset{1(+)}{\overset{1(+}{\Phi}}_{k} \tag{16.2}$$

$$\underset{1+}{\overset{i-}{B}}_{km} \; \underset{1(+)}{\overset{i(+)}{\Psi}}{}^{m} = \underset{1(+)}{\overset{i(-)}{\Phi}}_{k} \tag{16.3}$$

$$\underset{i-}{\overset{1+}{B}}_{km} \; \underset{i(+)}{\overset{1(+)}{\Psi}}{}^{m} = \underset{i(+)}{\overset{1(+)}{\Phi}}_{k} \tag{16.4}$$

$$\underset{i-}{\overset{i-}{B}}_{km} \; \underset{i(+)}{\overset{i(+)}{\Psi}}{}^{m} = \underset{i(-)}{\overset{i(-)}{\Psi}}_{k}. \tag{16.5}$$

On voit ainsi que les réponses à de nombreuses questions, dont certaines sont classiques, peuvent être déduites des équations (15.1) à (15.8) par simple lecture. Énumérons quelques-unes de ces questions :

Quelles doivent être les parités relatives spatiale et temporelle de deux spineurs du premier rang de même locovariance, de même plexivariance et de mêmes flectovariances pour qu'il existe une forme hermitienne à coefficients constants qui soit invariante par rapport au groupe de Lorentz général ? (Il faut qu'ils soient de même parité spatiale et de parités temporelles opposées, ou le contraire.)

Même question pour les formes bilinéaires. (Ici la réponse dépend des flectovariances. Si les flectovariances spatiale et temporelle sont différentes — $\underset{1}{\overset{i}{\Psi}}$ ou $\underset{i}{\overset{1}{\Psi}}$ — la réponse est la même que précédemment. Si les flectovariances sont les mêmes — $\underset{1}{\overset{1}{\Psi}}$ ou $\underset{i}{\overset{i}{\Psi}}$ — il faut que les deux parités soient les mêmes ou les deux opposées.)

Ψ étant un spineur du premier rang contravariant non pointé, quelles doivent être ses deux flectovariances pour qu'il soit de mêmes parités spatiale et temporelle que $B\Psi$, $B_U\Psi$, $C_E\Psi$ ou $C_T\Psi$?

$$(\underset{1}{\overset{1}{\Psi}},\ \underset{i}{\overset{i}{\Psi}},\ \underset{1}{\overset{i}{\Psi}}\ \text{ou}\ \underset{i}{\overset{1}{\Psi}}).$$

Pour des flectovariances convenables, le spineur Ψ est-il de mêmes parités spatiale et temporelle que $I_U\Psi$, $A_E\Psi$ ou $A_T\Psi$? (Non).

Il serait aisé d'allonger la liste.

Manuscrit reçu le 18 mars 1957.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Pauli (W.), Ann. Inst. Poincaré, 1936, **6**, 109.

[2] Brauer (R.) et Weyl (H.), *Amer. J. Math.*, 1935, **57**, 425.

[3] Van der Waerden (B. L.), Nachr. kgl. Ges. Wiss., Göttingen, 1929, 100.

[4] Cartan (E.), Leçons sur la théorie des spineurs. H. Hermann, Paris, 1938.

[5] Bhabha (H. J.), *Rev. Mod. Physics*, 1949, **21**, 451.

[6] Racah (G.), *Nuovo Cimento*, 1937, **14**, 322.

[7] Watanabe (M. S.), *Phys. Rev.*, 1951, **84**, 1008.

[8] Winogradzki (J.), *C. R. Acad. Sc.*, 1957, 244

PRODUCTION DE COURANT CONTINU PAR UNE DÉCHARGE EN HAUTE FRÉQUENCE. II.

Par Mlle M. CHENOT
École Normale Supérieure des Jeunes Filles, Paris.

L'étude détaillée de la force électromotrice continue et du débit de courant correspondant fournis par un tube à décharge en haute fréquence a été faite dans un article précédent [1] pour une décharge excitée dans l'hydrogène, sur la fréquence de 7,69 MHz. Afin de déterminer l'influence de la fréquence, les expériences ont été reprises sur le même tube, dans les mêmes conditions, avec la fréquence plus élevée de 22 MHz, et étendues ensuite à d'autres fréquences.

1. Résultats expérimentaux sur la fréquence de 22 MHz.

1.1. La figure 1 donne le réseau des courbes qui représentent la variation de l'intensité i du courant

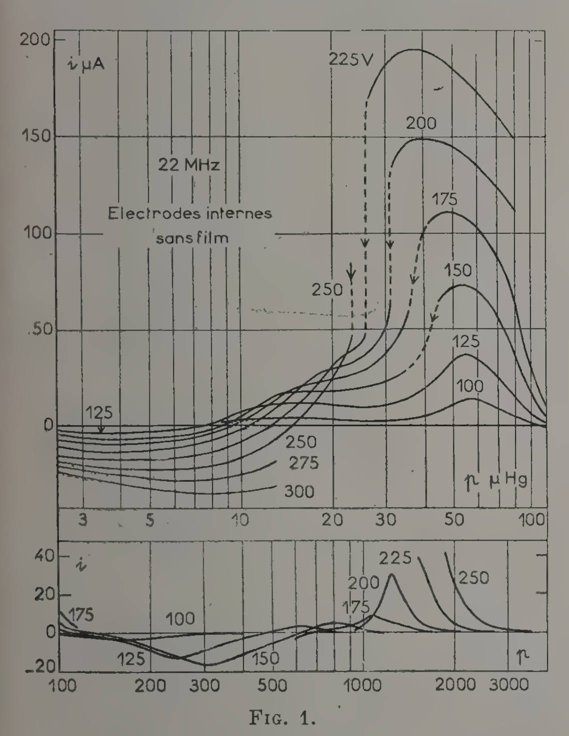


Fig. 1.

continu en fonction de la pression p, pour différentes valeurs U de la tension d'excitation haute fréquence. Le réseau a la même allure générale qu'à fréquence plus basse et montre encore plusieurs domaines de pression correspondant alternativement à des débits positifs et négatifs ; mais ces domaines sont tous déplacés vers des pressions plus faibles : la zone de grand débit positif comprise entre 150 et 300 μ Hg sur 7,69 MHz est reportée à des pressions inférieures à 100 μ Hg. A excitation égale, le débit est beaucoup plus élevé que sur 7,69 MHz. Quelques particularités doivent être notées. Si l'on suit une courbe dans le sens des pressions croissantes, le passage des valeurs négatives aux valeurs positives du courant se fait progressivement ; la discontinuité, qui accompagnait précédemment le changement de polarité, intervient ici entre deux valeurs positives de l'intensité. L'amorce d'un second maximum de courant positif apparaît sur la gauche du maximum positif principal. Au delà de $p = 100$ μ Hg, il n'était plus possible de dépasser une tension d'excitation de 150 V, quel que fût le couplage entre l'oscillateur et le résonateur réglé à l'accord en l'absence de décharge, de sorte que la seconde zone des courants négatifs est à peine représentée ; toutefois quand la pression continue à augmenter et dépasse 600 μ, on retrouve des valeurs élevées de l'excitation et de petites pointes de courant positif se dessinent, alors que la décharge a tendance à s'allumer sur une seule électrode ; au total, sur certaines excitations, on a successivement trois inversions de polarité du tube.

1.2. D'après les résultats obtenus à fréquence plus basse, l'état de surface des électrodes internes A et B reliées au circuit extérieur joue un rôle très important. Les courbes précédentes ont été déterminées avec des électrodes nettoyées et polies avant usage. Il était intéressant de rechercher si le passage de la décharge H. F. sur 22 MHz produisait aussi une pulvérisation de la paroi du tube, avec dépôt de films de silice sur les électrodes internes. Un essai effectué avec une tension d'excitation $U = 200$ V et un courant d'intensité $i = 156$ μA, pendant une durée totale de 21 heures, a montré seulement la formation d'un film jaunâtre très mince sur l'électrode B ([1], *fig.* 1) et d'une ébauche d'anneau coloré brun et bleu sur l'électrode A. Ces aspects sont les mêmes que ceux obtenus sur 7,69 MHz dans la zone des courants négatifs à basse pression, c'est-à-dire pour des pressions de même valeur. Il semble donc que ce soit la pression qui règle le dépôt des films, et non la forme absolue

de la décharge H. F. qui, dans une zone donnée de pression, peut correspondre selon la fréquence à un débit positif ou négatif. Ces dépôts très minces n'ont pas eu d'effet appréciable sur le courant dans les conditions de l'expérience. Lodge et Stewart, dans l'étude de dépôts analogues sur des lames minces de verre placées dans un tube à décharge H. F. [2], ont noté aussi l'évolution de leur aspect en fonction de la pression du gaz et vu qu'à basse pression il ne se formait plus de dépôts sur les lames. Ils ont indiqué un mécanisme de dépôt par diffusion des particules de silice, qui est évidemment en relation directe avec la pression du gaz de la décharge.

Une autre série de mesures du courant a été faite avec les électrodes recouvertes au préalable d'un film épais par une décharge sur 7,69 MHz. La diminution de débit a été considérable (*fig.* 2) et n'a entraîné qu'un faible déplacement du réseau de courbes par rapport à l'échelle des pressions, ceci en accord avec les résultats déduits des réseaux sur 7,69 MHz.

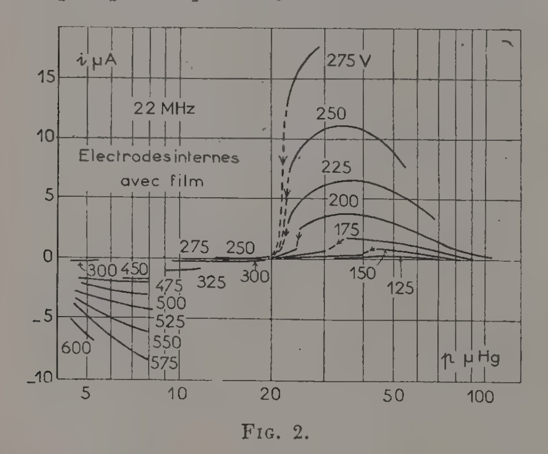


Fig. 2.

1.3. La détermination de la force électromotrice E_0 dans les deux cas, en l'absence et en présence de films sur les électrodes, a confirmé le sens des modifications notées sur la fréquence précédente (*fig.* 3). Les valeurs de l'intensité i sans tension extérieure relevées simultanément correspondent d'une part à celles de la figure 1 et, d'autre part, à des courbes d'amplitude encore plus faible que celles de la figure 2 ; mais entre les mesures relatives au courant seul ayant permis le tracé des courbes de cette dernière figure et les mesures simultanées de i et de E_0, on avait laissé passer la décharge pendant plus de neuf heures, ce qui avait légèrement modifié les couches déposées sur les électrodes. La mesure de E_0 a été encore plus délicate que sur l'autre fréquence. En outre, à plusieurs reprises, l'application d'une tension continue en série pour essayer de déterminer E_0 a provoqué un changement de régime de la décharge, si bien qu'il n'a pas été possible de mesurer i et E_0 dans les mêmes conditions.

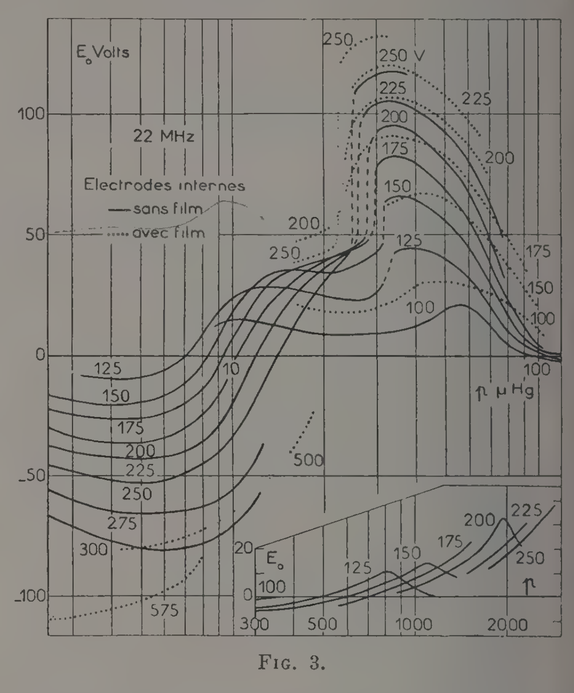


Fig. 3.

Le calcul de la résistance interne du générateur continu équivalent au tube conduit à une évolution en fonction de la pression comparable à celle observée sur 7,69 MHz.

2. **Influence générale de la fréquence.** — Nous allons examiner maintenant l'ensemble des résultats obtenus sur l'influence de la fréquence. Les mesures du courant i étant beaucoup plus rapides que les déterminations de la force électromotrice E_0, par raison de commodité, ce sont les réseaux donnant l'intensité du courant qui ont été tracés pour différentes fréquences comprises entre 3,59 MHz et 44,7 MHz.

De façon générale, aux fréquences inférieures à 15 MHz, les réseaux ressemblent à celui décrit pour 7,69 MHz dans l'article précédent [1] ; mais ils se déplacent vers les grandes pressions à mesure que la fréquence décroît. Les figures 4 et 5 montrent les réseaux correspondant aux fréquences 14,1 MHz et 4,78 MHz.

Entre 15 et 30 MHz, les réseaux prennent des allures très diverses au premier abord, avec de curieuses interruptions des caractéristiques sur les fréquences 18,6 et 24,5 MHz (*fig.* 8 et 9). Au delà de 30 MHz, le changement de forme est encore plus marqué ; les courants observés sont toujours positifs dans tout le domaine de pression exploré et deviennent nettement plus importants. Les

figures 10, 11 et 12 donnent les réseaux pour 31,1 MHz, 37 MHz et 44,7 MHz.

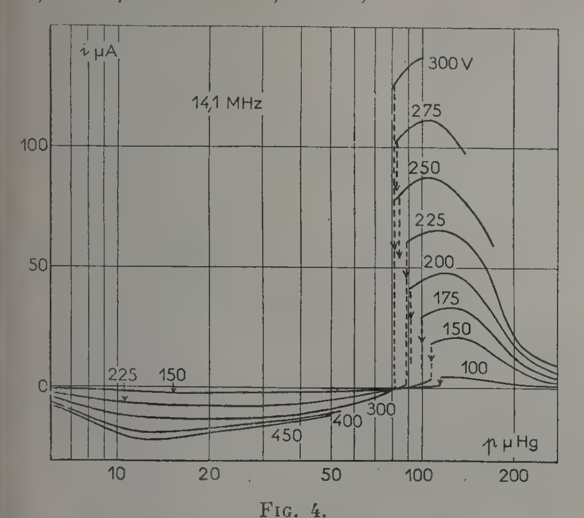


Fig. 4.

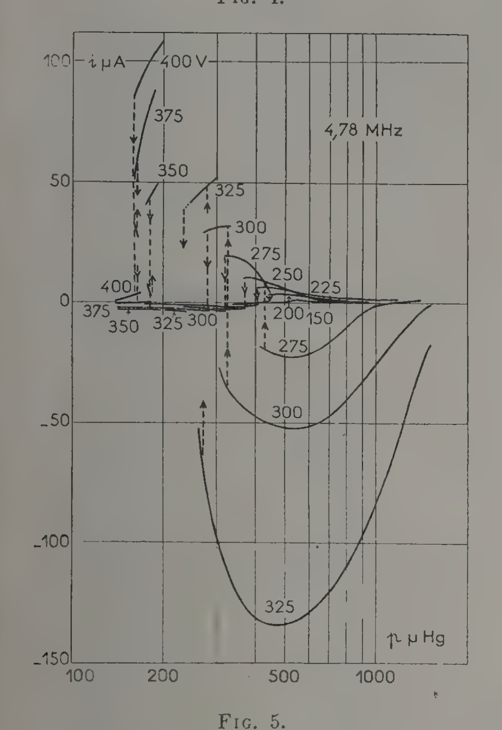


Fig. 5.

La discussion des réseaux sera faite ultérieurement lorsque le principe d'une interprétation qualitative aura été donné. C'est ce principe qui est exposé dans les paragraphes suivants.

3. **Allumages et extinctions primaires et secondaires de la décharge.** — 3.1. Pour un tube donné, rempli d'un gaz déterminé, la force électromotrice est fonction de la pression du gaz, de la tension d'excitation H. F. et de la fréquence de l'excitation. D'autre part, j'ai indiqué à plusieurs reprises que les différents domaines de débit correspondaient à des aspects lumineux différents de la décharge. Or la colonne gazeuse, limitée par les deux électrodes internes A et B, peut être considérée comme divisée en trois parties par la présence des électrodes externes A′ et B′. Ce sont les conditions locales de champ et d'ionisation qui règlent l'allumage ou l'extinction de la décharge entre deux électrodes voisines. Le problème ressemble à celui que l'on rencontre dans l'étude des triodes à gaz et à cathode froide [3].

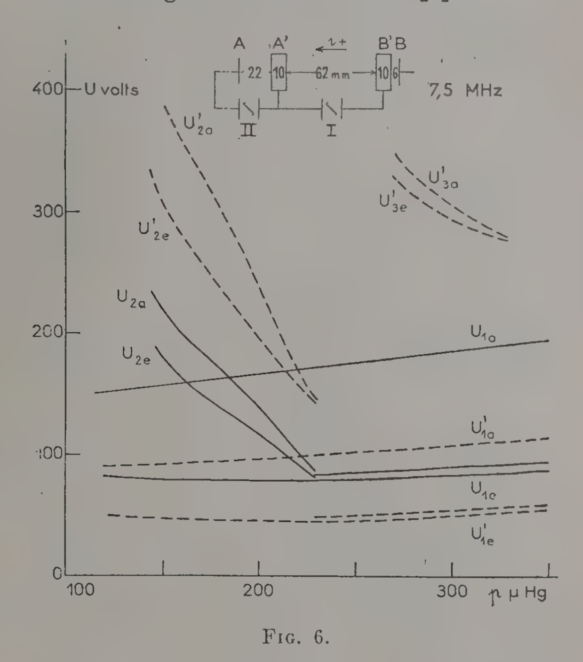


Fig. 6.

Voyons le cas d'une fréquence déterminée. Dans la disposition d'électrodes adoptée (*fig.* 6), la distance A′B′ des électrodes externes est beaucoup plus grande que celle des électrodes A et A′, qui est elle-même supérieure à celle des électrodes B et B′ ; ces distances sont respectivement $d_1 = 62$ mm, $d_2 = 22$ mm et $d_3 = 6$ mm. La tension d'excitation U_1 est appliquée entre les électrodes A′ et B′ ; elle fait apparaître des tensions U_2 entre A et A′ et U_3 entre B et B′, tensions plus faibles que U_1. Les électrodes A et B sont d'ailleurs mises en court-circuit au point de vue de la haute fréquence par un condensateur de capacité grande par rapport aux capacités mutuelles des paires d'électrodes, de sorte que $U_1 = U_2 + U_3$.

D'après ce que l'on sait des potentiels d'allumage U_a en haute fréquence, les positions respectives des courbes de potentiel d'allumage pour les trois couples d'électrodes sont telles qu'à pression

convenable U_{1a} peut être très inférieur à U_{2a} ou U_{3a} ; donc la décharge s'allume d'abord entre les électrodes A' et B' ; des particules diffusent alors vers les extrémités du tube, mais la décharge principale est bien comprise entre A' et B'. Cet allumage sans ionisation antérieure du milieu sera dit allumage primaire de l'espace A'B'. L'ionisation du gaz dérègle l'accord du résonateur relié aux électrodes externes et la tension U_1 baisse en général. Si l'on augmente ensuite l'excitation, on peut atteindre une valeur telle que la tension U_2 devienne suffisante pour provoquer une brusque augmentation de la brillance de la décharge entre les électrodes A et A'. Cette mutation de la décharge s'accompagne d'une chute de la tension U_2 et d'une diminution corrélative de la tension U_1 correspondante ; bien que l'espace AA' soit déjà ionisé par les particules qui ont diffusé à partir de la région A'B', c'est un véritable allumage secondaire qui se produit entre A et A' ; il donne lieu en fonction de la pression à une courbe de potentiel explosif secondaire comparable à celle du potentiel explosif primaire. Il faut remarquer que la courbe d'allumage secondaire se rapporte dans le cas présent à une ionisation préalable qui varie le long de la courbe. Un effet analogue peut être enfin observé sur l'espace BB'. Quand on diminue ensuite l'excitation, on observe de semblable manière des potentiels d'extinction secondaire pour AA' et BB' et le potentiel d'extinction primaire pour A'B'. Dans la suite, pour les intervalles AA' et BB', il s'agira toujours de ces potentiels secondaires, sauf spécification particulière.

3.2. Sur la fréquence de 7,5 MHz, à l'aide de deux électromètres notés I et II, reliés respectivement à A' et B' d'une part et à A et A' d'autre part, on a mesuré pour différentes pressions les potentiels d'allumage U_{1a} et U_{2a}, ainsi que les potentiels d'extinction U_{2e} et U_{1e}. Pour chacune de ces mesures, on a relevé aussi les valeurs correspondantes U' lues sur l'autre électromètre ; par exemple, la valeur U_{1a} réelle est celle lue sur l'électromètre I, et la valeur U'_{1a} est la valeur indiquée simultanément par l'électromètre II. A défaut d'un troisième électromètre difficile à placer dans le montage réalisé, on s'est contenté de noter sur l'électromètre I les valeurs U'_{3a} et U'_{3e} marquées par cet électromètre au moment de l'allumage et de l'extinction dans la zone BB'. Les résultats sont portés sur la figure 6 ; elle permet de suivre aisément l'ensemble des phénomènes.

L'extinction primaire, à partir de $p = 230\ \mu$, se fait en deux temps : la partie droite de la décharge A'B' s'éteint d'abord, puis l'extinction totale se réalise à une tension un peu plus élevée, d'où le dédoublement de la courbe U_{1e}. Au voisinage de la même pression, l'allumage secondaire AA' se produit pour une tension U'_{2a}, lue sur l'électromètre I, inférieure à la tension U_{1a} correspondante et se rapprochant de la valeur à laquelle la tension U_1 retombe après l'allumage primaire, valeur qui est elle-même très voisine de U_{1e}. A partir de ce moment, aussitôt que la décharge A'B' s'allume, la décharge AA' apparaît et augmente de brillance progressivement si l'on fait croître la tension d'excitation ; les prolongements des courbes U_{2a} et U_{2e} se confondent donc pratiquement avec une courbe très voisine de la courbe U'_{1e}.

Les courbes d'allumage primaire et d'extinction primaire de la région AA' du tube ont été déterminées directement ; la courbe d'allumage non reproduite correspond à des tensions beaucoup plus élevées que la courbe U_{2a} (par exemple 540 V pour $p = 200\ \mu$, au lieu de 140 V pour l'allumage secondaire) ; mais la courbe U_{2e} se place à peu près sur la courbe d'extinction primaire de l'intervalle considéré.

On constate enfin que le rapport des indications simultanées en volts des deux électromètres U et U' est indépendant de l'état de la décharge, de la pression, et a même valeur qu'en l'absence de décharge.

4. **Coordination des résultats expérimentaux.** — Si l'on considère que l'existence des différentes zones de débit de courant est en relation avec les potentiels d'allumage ou les potentiels minimums d'entretien de la décharge dans les diverses parties du tube, un ordre s'introduit tout naturellement dans les résultats des expériences.

4.1. A une fréquence donnée, l'état de la décharge, caractérisé par la pression P et la tension d'excitation U_1, est représenté par un point M_1 du diagramme U, p (*fig.* 7), auquel sont associés les points M_2 et M_3 correspondant aux deux parties extrêmes de la colonne gazeuse. Le point M_1 est nécessairement au-dessus de la courbe U_{1e} du potentiel minimum d'entretien de cet état de la décharge ; lorsqu'il se déplace dans le plan, si l'un

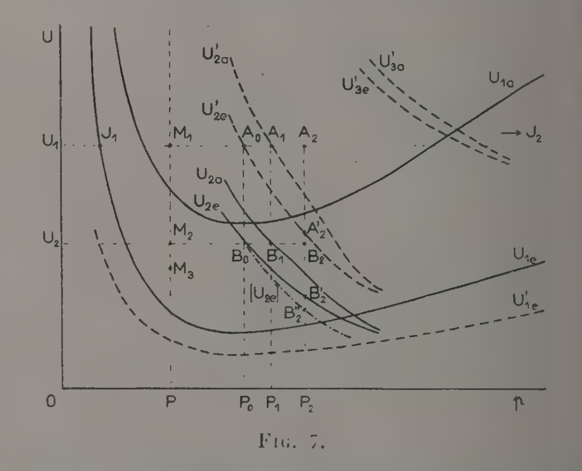


Fig. 7.

des points M_2 ou M_3 rencontre la courbe de potentiel explosif qui lui correspond, l'allumage secondaire se produit ; il a naturellement des répercussions dans tout le tube, les points représentatifs changent brusquement de position, mais les variations sont en fait petites.

Supposons alors que, pour l'excitation U_1 maintenue constante et assez grande, on augmente graduellement la pression. A basse pression, la tension U_1 provoque seulement l'allumage primaire A'B' ; c'est la zone des faibles courants négatifs. A pression plus élevée P_1, le point M_1 atteint la courbe U'_{2a} au point A_1 et le point M_2 arrive en B_1 sur la courbe U_{2a} ; l'allumage secondaire entre A et A' se produit, tandis que l'allumage primaire persiste entre A' et B' ; on a la branche de courbe des courants positifs. A pression encore plus élevée, l'allumage secondaire entre B et B' peut intervenir à son tour ; le débit devient négatif.

Si l'on opère au contraire à pression constante, la tension maximum réalisable à cette pression permet par exemple l'allumage primaire A'B' et l'allumage secondaire AA' : le courant est positif ; c'est le cas représenté par les points A_2 et B_2 à la pression P_2. En diminuant U, le point B_2 atteint la courbe d'extinction secondaire U_{2e} au point B'_2, la décharge pâlit subitement entre A et A' et le courant devient négatif. Si la tension initiale était suffisamment élevée pour provoquer aussi l'allumage secondaire entre B et B', le courant serait d'abord négatif et on reviendrait à un courant positif par diminution de U. D'après la forme des courbes d'extinction secondaire, dans les deux cas, la valeur de U donnant la discontinuité du courant est d'autant plus faible que la pression est plus élevée.

Sur un réseau, l'absence d'une zone particulière de débit peut donc correspondre au fait que le réglage de l'oscillateur utilisé ne donnait pas une tension suffisante pour permettre l'allumage secondaire nécessaire. Ainsi sur 8,22 MHz, la zone des grands courants négatifsn'a pas été observée, alors que sur 7,69 MHz ([1], *fig.* 3), elle était bien représentée. Si l'on a pu obtenir des tensions élevées, les courbes d'extinction secondaire peuvent aussi différer selon l'état du tube ; un réseau obtenu sur 7,42 MHz [4] combinait les aspects des deux réseaux précédents pour les pressions comprises entre 500 et 1 000 μ Hg.

4.2. Dans une zone donnée, la forme des courbes $E_0 = f(p)_U$ est facile à interpréter. A pression constante, par exemple P_2, si le point A_2 s'éloigne de la courbe U_{1e}, le point B_2 s'éloigne aussi de courbe U_{2e} ; l'ionisation du gaz croît et la force électromotrice E_0 augmente en même temps que l'excitation H. F. A excitation constante, M_1 se déplace sur une parallèle à l'axe des pressions qui coupe la courbe U_{1e} en deux points J_1 et J_2 où la décharge s'éteint ; l'expérience montre que le courant qui précède l'extinction est très petit, ce qui indique une ionisation faible aux points J_1 et J_2 ; dans l'intervalle, l'ionisation doit passer par un maximum qu'il est raisonnable de situer à la pression assurant le minimum de la courbe U_{1e}, d'où un maximum de E_0 à cette pression. Le point M_2 subit un déplacement analogue par rapport à la courbe U_{2e}, d'où un nouveau maximum de E_0. Rohde, qui avait essayé de mesurer la conductibilité dans une décharge H. F. [5], avait déjà noté qu'on observe la plus grande conductibilité pour la fréquence appliquée à la pression correspondant au minimum du potentiel minimum d'entretien. Rotzeig, dans le court résumé publié sur ses recherches [6], a confirmé que le courant redressé à excitation constante en fonction de la pression donnait une courbe directement inverse de celle du potentiel minimum d'entretien en fonction de la même variable.

Toutefois, dans les expériences décrites dans les paragraphes précédents, les maxima se déplacent dans le sens des pressions croissantes quand l'excitation diminue. Or ce sont les minima des courbes d'extinction secondaire U_{2e} et U_{3e} qui doivent régler les positions des grands maxima positifs et négatifs de courant. Le déplacement de la position du maximum en fonction de l'excitation peut s'expliquer si l'on se rappelle la remarque faite sur la courbe d'extinction secondaire, § 3.1, qui correspond à une ionisation préalable variable dépendant de l'allumage primaire. Considérons donc un point tel que A_2 ; la tension d'excitation U_1 étant supérieure à la tension U'_{2e} du point A'_2 associé au point B'_2 sur la courbe U_{2e}, l'ionisation de l'espace AA' par diffusion à partir de la décharge primaire est plus grande que celle pour laquelle la courbe U_{2e} a été tracée ; l'extinction secondaire devrait donc se produire pour un point B''_2 d'ordonnée inférieure au point B'_2. Autrement dit, la courbe d'extinction secondaire relative à une excitation constante U_1 serait en réalité une courbe $[U_{2e}]$ se détachant de la courbe U_{2e} à la pression P_0, au point B_0 associé au point A_0 d'ordonnée U_1 sur la courbe U'_{2e}. Plus U_1 est grand, plus la pression P_0 est petite et plus la courbe est abaissée. D'autre part, pour une distance donnée d'électrodes, quand un potentiel caractéristique s'abaisse, le minimum de la courbe se déplace toujours vers les pressions plus faibles. Il en résulte que le maximum de la courbe de courant doit se déplacer vers une pression d'autant plus faible que U_1 est plus grand. Ceci est valable aussi vis-à-vis de la courbe U_{3e}.

5. **Application à l'influence de la fréquence d'excitation.**

5.1. De façon générale, les courbes d'allumage et d'extinction secondaires évoluent en fonction de la fréquence de manière analogue aux courbes d'allumage et d'extinction primaires ; elles se

déplacent vers les basses pressions à mesure que la fréquence augmente, et aussi vers des potentiels plus faibles : d'où le déplacement général des zones privilégiées de débit continu. Au cours de cette évolution, leurs positions respectives se modifient, si bien que les réseaux donnant le courant débité revêtent des aspects variés. Les différentes zones empiètent plus ou moins les unes sur les autres (comparer les réseaux sur 14,1 MHz et 4,78 MHz) ; si les courbes d'extinction U_{2e} et U_{3e} se rapprochent, on n'a plus que des fragments réduits des caractéristiques $i = f(p)_U$; c'est ce qu'on observe dans la zone des courants positifs sur les fréquences de 4,78 et 3,59 MHz.

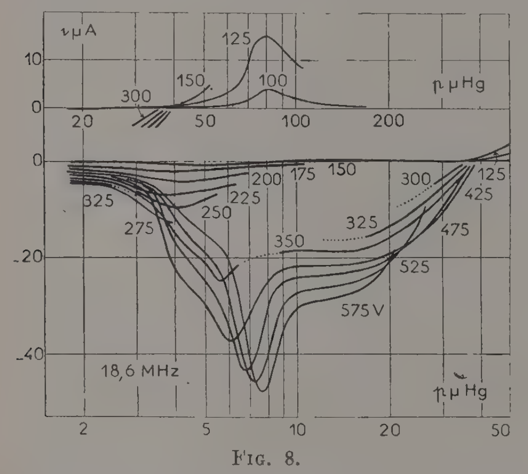


FIG. 8.

La notion d'allumage secondaire peut aussi s'étendre à l'intervalle des électrodes A′ et B′. Ceci intervient dans le réseau (*fig.* 8) correspondant à la fréquence 18,6 MHz. Aux pressions inférieures à 40 μ environ, la décharge à l'allumage entre A′ et B′ est très peu visible ; mais en augmentant légèrement la tension U, on obtient une décharge plus brillante avec brusque augmentation de U ; c'est ce régime que l'on maintient jusqu'à des tensions de l'ordre de 600 V et qui donne des courants négatifs relativement plus grands qu'aux fréquences plus basses. L'allure des courbes suggère d'ailleurs un effet de résonance. Quand on diminue l'excitation, on revient au régime à faible luminosité, avec discontinuité de U, de sorte que le réseau présente une région où les caractéristiques sont interrompues. C'est le même phénomène que celui que j'avais décrit autrefois [7] dans la vapeur de mercure à basse pression excitée sur 71,4 MHz et que j'ai eu également l'occasion d'observer dans l'hydrogène à pression plus élevée sur une fréquence de l'ordre de 1 MHz. A partir de 40 μ Hg, la décharge s'allume tout de suite entre A′ et B′ sur le second régime, et, dès qu'on augmente un peu la tension, elle s'allume entre A′ et A ; le courant devient positif et le désaccord du résonateur sur l'oscillateur est tel qu'il est impossible d'avoir des tensions élevées ; toutes les courbes de $U = 450$ V à $U = 300$ V sont brusquement arrêtées.

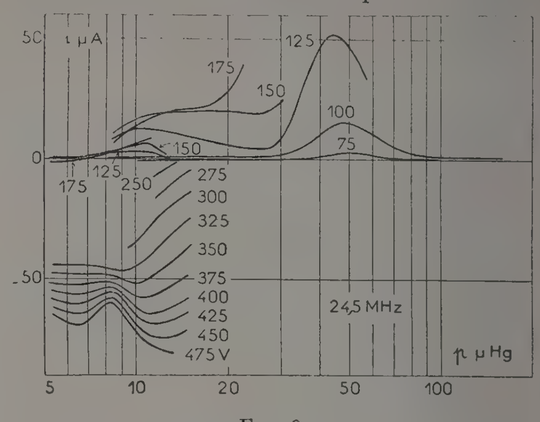


FIG. 9.

Des effets analogues s'observent sur la fréquence de 24,5 MHz (*fig.* 9). On a encore, d'une part, un trou dans le réseau et, d'autre part, toutes les caractéristiques de $U = 450$ V à $U = 250$ V sont interrompues à partir de la pression $p = 15$ μ Hg, tandis qu'on observe un courant positif aux tensions plus faibles. Un fait nouveau intervient dans la zone des courants négatifs ; lorsqu'on diminue l'excitation H. F. à pression constante, le régime qui succède à la discontinuité de la tension d'excitation donne un courant positif ; pour certaines pressions, deux régimes sont d'ailleurs possibles, ce qui corrobore les indications données par l'étude de l'allumage primaire : la tension après l'allumage tantôt retombe peu, tantôt subit une chute importante, ce qui décèle deux états différents de la décharge. C'est seulement aux plus faibles pressions qu'on obtient un très petit courant négatif ; on a donc à excitation constante en fonction de la pression un passage graduel d'un courant positif à un courant négatif quand la pression décroît.

Sur la fréquence intermédiaire de 22 MHz étudiée au début de cet article (*fig.* 1), ce passage graduel a été couramment observé, mais les courants étaient plus grands car les électrodes ne portaient pas de films et, dans ce cas, on n'a jamais eu de grandes tensions d'excitation à basse pression ; par contre, le réseau pour les électrodes recouvertes d'un film (*fig.* 2), présente des analogies évidentes avec le réseau sur 24,5 MHz ; il faut noter ici que les courbes des figures 8 et 9 ont été obtenues au cours d'une longue suite d'essais sur les différentes fréquences, à un moment où l'importance de l'état de surface des électrodes n'avait pas encore été reconnue ; il est très probable qu'elles se rapportent à des électrodes recouvertes d'un film. Aux pressions plus élevées, sur 22 MHz, la discontinuité du courant ramène d'une grande valeur positive à une valeur plus faible également positive. Le problème est peut-être analogue à celui qui se pose à la fré-

quence 7,69 MHz, aux pressions voisines de 300 μ Hg, où l'on passe pour le courant à pression constante d'une valeur élevée négative à une faible valeur encore négative avant de retrouver un courant positif. Il est probable qu'on rencontre alors un régime intermédiaire dans l'une des parties latérales de la décharge, régime qui s'éteint progressivement.

Les courants sont plus grands qu'aux fréquences plus basses, car on se rapproche des fréquences qui permettent l'entretien le plus facile de la décharge H. F. aux pressions les plus faibles ; les conditions d'un tel entretien étaient atteintes vers 30 MHz dans le tube en service.

Le réseau de 22 MHz appelle une dernière remarque. Il a été tracé dans un domaine de pression suffisamment étendu pour que sa coordination complète fasse intervenir aussi les potentiels primaires d'allumage et d'entretien des régions AA′ et BB′ du tube, dont les courbes n'apparaissent pas sur la figure 7 tracée à partir des résultats obtenus sur 7,5 MHz. Ainsi entre 100 et 500 μ Hg, la partie AA′ s'éteignait en dernier ; à 675 μ, cette région s'illuminait en premier, tandis que la décharge disparaissait en dernier entre B et B′ ; au delà de 1 000 μ, c'était la région BB′ qui s'allumait d'abord et qui continuait à s'éteindre en dernier. Ces allumages et extinctions correspondent évidemment aux phénomènes primaires dans les régions correspondantes.

5.2. Aux fréquences supérieures à 30 MHz, pour lesquelles la courbe du potentiel minimum d'entretien de l'espace A′B′ commence à se déplacer vers les pressions croissantes quand la fréquence augmente, les réseaux changent d'aspect. En dépit de la diversité des courbes, les décharges présentent cependant dans ce domaine de fréquence des caractères communs. A cause de la faible puissance de l'oscillateur et de l'importance des intensités d'ionisation dans la décharge, les tensions d'excitation atteintes ne sont jamais très grandes ; mais à excitation donnée, les courants sont beaucoup plus importants ; à cet égard, la comparaison des courbes pour $U = 125$ V est intéressante. L'aspect lumineux de la colonne gazeuse évolue de la même manière avec la pression ; aux basses pressions la luminosité est à peu près uniforme dans tout le tube de A à B ; puis, au delà d'une certaine pression, la brillance de la partie centrale se renforce, en même temps que la partie gauche AA′ existe mieux individualisée ; dans les deux cas, comme la décharge est bien allumée entre A et A′, la force électromotrice est toujours positive.

Sur 31,1 MHz (*fig.* 10), le passage d'une forme à l'autre se fait graduellement vers $p = 21$ μ ; les courbes du courant à excitation constante sont continues et présentent trois maxima successifs dont l'amplitude augmente avec la pression. Au delà de 50 μ, les mesures prolongées jusqu'à 174 μ n'ont fourni que des courants négligeables.

L'idée d'une résonance pour expliquer la forme des courbes était déjà suggérée par certains des réseaux précédents ; elle semble s'imposer ici, aussi bien que sur la fréquence suivante de 37 MHz ; bien que

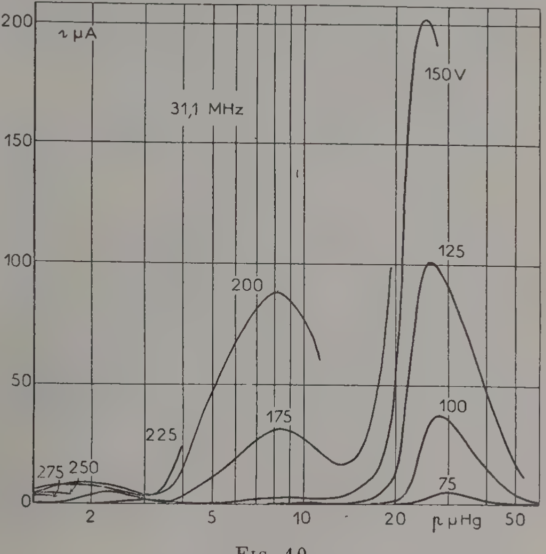


Fig. 10.

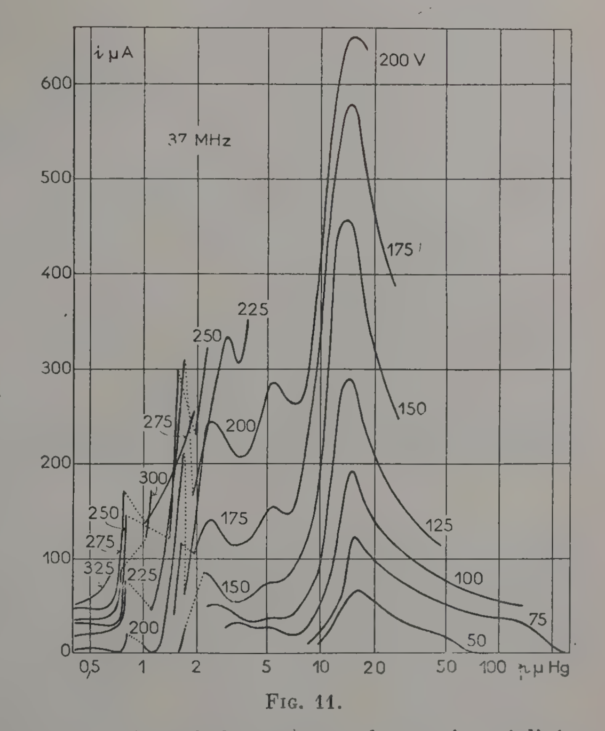


Fig. 11.

les conditions de fréquence et de pression réalisées soient celles pour lesquelles on peut observer des phénomènes d'ondes stationnaires dans le gaz ionisé [4], on ne voit pas comment ce genre de résonance pourrait intervenir dans le cas actuel où,

quelle que soit la grandeur de l'excitation, c'est la pression qui paraît régler la résonance.

A la fréquence 37 MHz (*fig.* 11), la différenciation de la décharge intervient aussi vers 21 μ, alors que le grand maximum de courant est déjà dépassé. Les résonances successives sont moins nettes ; en outre, il s'établit entre 0,5 et 2 μ d'autres régimes qu'il est assez difficile de distinguer, car le courant croît très vite pour une faible variation de la pression ; cette région marque la transition vers le réseau fourni par la fréquence la plus élevée 44,7 MHz.

Sur cette dernière fréquence, les phénomènes deviennent très compliqués. Lorsqu'on diminue régulièrement le couplage du résonateur et de l'oscillateur, la pression étant fixée, la tension U entre électrodes externes subit une marche irrégulière ; elle diminue d'abord, croît ensuite, subit en général une discontinuité qui la ramène à une valeur plus faible, croît de nouveau, enfin diminue jusqu'à l'extinction. Ces variations correspondent aux différents états de la décharge qui peuvent se

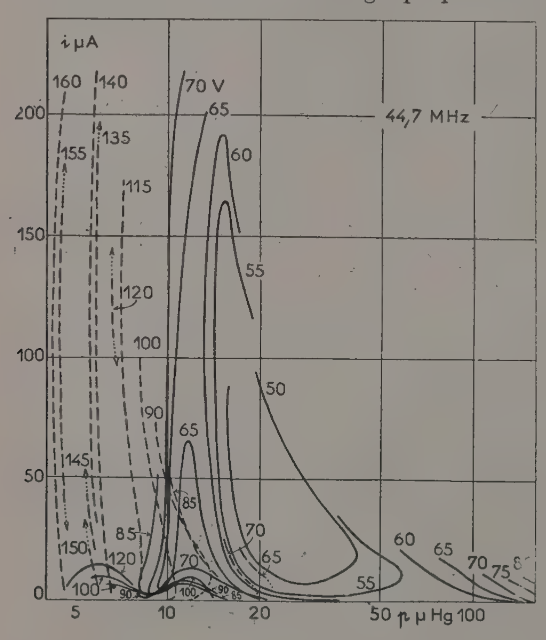


Fig. 12.

succéder à la même pression. En dehors de régimes à faible débit, il est possible de reconnaître et de suivre deux régimes à grand courant. Le premier existe aux basses pressions, alors que la décharge présente une luminosité à peu près uniforme dans tout le tube (courbes en tirets, *fig.* 12) ; les variations d'intensité du courant sont très rapides en fonction de la tension d'excitation ou de la pression ; ce régime diminue d'importance quand la pression augmente et disparaît vers 25 μ. L'autre régime a commencé à se développer à partir de 9 μ environ (courbes en trait plein) ; il correspond à des tensions plus faibles et provoque également des variations très rapides du courant, avec une région de maximum d'intensité entre 10 et 20 μ. La forme des courbes met en évidence la difficulté qu'on peut éprouver à maintenir un état bien défini de la décharge dans la zone des faibles pressions sur une fréquence élevée.

6. **Conclusion.** — Les réseaux de courbes font ressortir la multiplicité des aspects que peut revêtir le fonctionnement d'un tube à gaz ionisé en haute fréquence comme source de courant continu lorsque la fréquence et la pression varient. La liaison établie entre ces aspects et les potentiels d'entretien de la décharge dans les différentes parties du tube utilisé permet une coordination intéressante des résultats ; elle peut, dans une certaine mesure, orienter pour le choix d'un tube en vue d'applications. Les courbes font apparaître nettement les zones d'utilisation stable ; à cet égard, si l'emploi des hautes fréquences aux faibles pressions semble avantageux pour l'obtention de courants assez intenses, le tube devient très sensible aux petits changements dans les conditions d'utilisation.

Le phénomène étant ainsi étudié au point de vue expérimental, il reste à interpréter la relation qui existe entre les aspects lumineux de la décharge, correspondant aux illuminations partielles de la colonne gazeuse, et les polarités successives du tube. Ce problème fait l'objet de recherches actuelles.

Une présentation cohérente des courbes n'a été possible que grâce au soin avec lequel Mlle I. Gazan a exécuté toutes les mesures ; je l'en remercie très vivement.

Manuscrit reçu le 9 avril 1957.

Note rectificative. — Une contradiction s'est glissée dans l'article précédent [1]. A la fin du paragraphe 4.1, il est dit que l'enlèvement des films sur les électrodes n'a pas altéré la courbe du potentiel d'extinction du tube, ni dans l'ensemble celle du potentiel d'allumage qui a été seulement un peu relevée au voisinage du minimum. Au paragraphe 6.3, dans la discussion du rôle des films, il est indiqué au contraire que le potentiel explosif devrait être abaissé en présence des films, alors qu'il est plus élevé. En fait, les mesures primitives avaient donné le premier résultat, mais des mesures sur 22 MHz ont toujours donné le second résultat et de nouvelles mesures sur 7,5 MHz ont aussi conduit à ce dernier. En appliquant les idées développées dans l'article ci-dessus, les potentiels dont il s'agit sont les potentiels primaires de l'espace A'B' et n'intéressent pas directement les électrodes A et B qui peuvent porter les films, dont le rôle est plus difficile à expliquer.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Chenot (Mlle M.), *J. Physique Rad.*, 1956, **17**, 842.
[2] Lodge (J. I.) et Stewart (R. W.), *Canad. J. Research*, 1948, A **26**, 205.
[3] Bahls (W. E.) et Thomas (C. H.), *Electronics*, mai 1938, 14.
[4] Chenot (Mlle M.), *Appl. sc. Research*, Section B, vol. **5**, 124.
[5] Rohde (L.), *Ann. Physik*, 1932, **12**, 569.
[6] Rotzeig (B.), *Hochfreq. Techn. El. Ak.*, 1934, **43**, 65.
[7] Chenot (Mlle M.), *Ann. Physique*, 1948, **3**, 318.

EXPOSÉ ET MISE AU POINT BIBLIOGRAPHIQUE

DÉTERMINATION DE LA SURFACE DE FERMI PAR L'EFFET DE HAAS-VAN ALPHEN

Par André MARCHAND,
Laboratoire de Chimie générale. Faculté des Sciences de Paris.

Introduction. — La théorie des métaux, sous sa forme élémentaire, fait intervenir l'hypothèse du gaz d'électrons libres. Mais il apparaît clairement, lorsqu'on compare aux prévisions théoriques les résultats expérimentaux, que ce modèle est très approximatif, sauf peut-être pour les alcalins et les métaux nobles du 1er groupe. Si l'on veut améliorer la concordance entre théorie et expérience, il est nécessaire de tenir compte de l'influence du champ périodique du réseau sur le mouvement des électrons. C'est à ce moment que surgissent de sérieuses difficultés de calcul. La détermination de la structure des zones de Brillouin est en effet bien loin de permettre à elle seule l'explication quantitative d'une quelconque propriété d'un métal réel. L'un des obstacles principaux est sans doute le manque d'informations sur la disposition des surfaces d'énergie constante dans l'espace des moments P, et en particulier sur la surface de Fermi. C'est que la plupart des propriétés qui sont fortement influencées par le détail de la structure électronique dépendent de facteurs si nombreux qu'il est presque impossible de les obtenir séparément à partir des données expérimentales. Toutefois l'effet De Haas-Van Alphen, on s'en est récemment aperçu, offre des possibilités très intéressantes dans ce domaine, car il permet d'obtenir de façon simple et directe des informations sur la surface de Fermi : l'étude de cet effet, compte tenu de la géométrie et de l'anisotropie d'un cristal, paraît devoir suffire à déterminer complètement la surface de Fermi dans beaucoup de cas [13].

Mais il nous faut d'abord exposer brièvement la nature et la théorie de l'effet De Haas-Van Alphen.

L'effet De Haas-Van Alphen

C'est en 1930 que De Haas et Van Alphen découvrirent [1] que, à très basse température, la susceptibilité magnétique du bismuth varie périodiquement en fonction du champ magnétique.

L'explication de cet effet fut d'abord donnée par Peierls [2] en 1933, grâce à l'hypothèse du gaz d'électrons libres. Un grand nombre d'auteurs ont depuis cette date perfectionné la théorie [3]. Celle-ci semble maintenant rendre compte de façon satisfaisante des faits expérimentaux, dans tous les cas où des résultats détaillés ont pu être obtenus.

Pour ce qui nous concerne. il sera d'ailleurs suffisant de nous borner aux grandes lignes de cette théorie.

Modèle bidimensionnel. — Il est plus commode pour commencer de considérer l'effet De Haas-Van Alphen dans un métal bidimensionnel, avec l'approximation du gaz d'électrons libres de masse effective m^*. On sait que la résolution de l'équation de Schrödinger, en présence d'un champ magnétique perpendiculaire au plan du gaz, fournit dans ce cas les niveaux d'énergie électronique (compte non tenu du spin) :

$$E_n = (2n + 1) H\mu^*$$

chacun de ces niveaux ayant le degré de dégénérescence

$$g_n = 2SeH/ch.$$

Dans ces formules, n est un entier positif ou nul, S est la surface du cristal bidimensionnel, et μ^* est un magnéton de Bohr « effectif » :

$$\mu^* = eh/4\pi m^*c.$$

En l'absence de champ magnétique, au contraire, les niveaux d'énergie électronique forment une bande quasi continue, le nombre de niveaux situés dans un intervalle donné d'énergie étant constant.

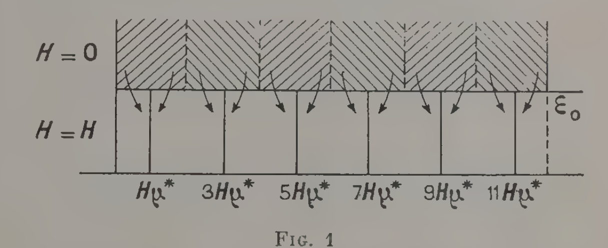


Fig. 1

On a juxtaposé, sur la figure 1, les deux répartitions de niveaux, en présence et en l'absence de champ. On voit que l'effet du champ magnétique est de rendre discontinue la distribution des niveaux : tous les niveaux qui, en l'absence de champ, étaient répartis uniformément entre les énergies $2nH\mu^*$ et $2(n + 1)H\mu^*$ se trouvent, en présence d'un champ H, concentrés en une valeur unique $E = (2n + 1)H\mu^*$ de l'énergie.

Lorsque la température est suffisamment basse, tous les niveaux sont pratiquement occupés, en l'absence de champ, jusqu'à la valeur ε_0 de l'énergie (niveau de Fermi) et sont tous vides au-dessus de cette valeur. On voit alors immédiatement que, en ce qui concerne

les niveaux inférieurs, le champ magnétique ne change pas l'énergie totale du gaz électronique. Cette énergie totale U est seulement modifiée par l'action du champ sur les niveaux voisins du niveau de Fermi. Si $E_N = (2N+1)H\mu^*$ est le niveau le plus voisin de ε_0 (avec $E_N \leqslant \varepsilon_0$), la modification $\Delta U = U(H) - U(0)$ de l'énergie totale provient uniquement des électrons d'énergie comprise (en l'absence de champ) entre $2NH\mu^*$ et ε_0.

Il est clair que ΔU est toujours positif, sauf lorsque $\varepsilon_0 - E_N = H\mu^*$, cas où $\Delta U = 0$.

L'énergie électronique totale U subit donc des fluctuations périodiques en fonction du champ, et le moment magnétique du gaz $\mathfrak{M} = -\partial U/\partial H$ montre des fluctuations semblables, se retrouvant identique à lui-même chaque fois que $2nH\mu^* = \varepsilon_0$. $\mathfrak{M}$ varie par conséquent, en fonction de $1/H$, avec une périodicité de $2\mu^*/\varepsilon_0$. On a donc ici, avec de modèle simple, une explication de l'origine de l'effet De Haas-Van Alphen. La prise en considération du spin électronique ne change pas le phénomène. Elle introduit un simple dédoublement des niveaux en présence de champ :

$$E_n = (2n+1)\, H\mu^* \pm \mu H$$

($\mu = eh/4\pi mc$ étant le magnéton de Bohr réel), dédoublement qui est d'ailleurs faible par rapport à l'écartement des niveaux dû au champ, lorsque la masse effective m^* est nettement inférieure à la masse électronique réelle m.

Cas d'un cristal réel. — Passant maintenant au cas d'un cristal réel, nous remarquerons d'abord que : 1° Dans un cristal réel, le mouvement des électrons est tridimensionnel, et le mouvement parallèlement au champ n'est pas quantifié, sinon par suite des dimensions finies du cristal. 2° Les niveaux d'énergie sont élargis par les collisions des électrons avec le réseau. 3° Dès que la température dépasse le zéro absolu, la surface de Fermi cesse de constituer une limite définie entre les niveaux occupés et vides.

Rôle de la surface de Fermi. — En ce qui concerne la prise en considération de la troisième dimension, nous utiliserons une méthode de calcul un peu différente de celle qui a été employée précédemment pour le gaz bidimensionnel, et qui a l'avantage d'être plus rapide et de mettre en évidence l'intérêt que présente l'effet De Haas-Van Alphen pour la détermination de la surface de Fermi.

Considérons d'abord, encore une fois, le cas du gaz bidimensionnel. **P** étant le vecteur « impulsion » de l'électron libre, le moment associé à la coordonnée de position **r** est, en présence de champ magnétique, $\mathbf{P} - e\mathbf{A}/c$, **A** étant le potentiel vecteur d'où dérive le champ ($\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$).

La règle de quantification de l'orbite de l'électron s'écrit alors

$$\int (\mathbf{P} - e\mathbf{A}/c) . \mathrm{d}\mathbf{r} = (n + 1/2)\, h$$

e étant la charge de l'électron ($e < 0$).

On sait d'autre part que dans un solide l'électron en présence d'un champ magnétique **H** est soumis à une force **F** telle que :

$$\mathbf{F} = (e\mathbf{v}/c) \wedge \mathbf{H} = \mathrm{d}\mathbf{P}/\mathrm{d}t$$

où $\mathbf{v} = \operatorname{grad}_{\mathbf{P}} (E)$ est la vitesse de l'électron.

On a donc

$$\mathrm{d}\mathbf{P}/\mathrm{d}t = -(e\mathbf{H}/c) \wedge \mathbf{v} = -(e\mathbf{H}/c) \wedge \mathrm{d}\mathbf{r}/\mathrm{d}t$$

et

$$\mathbf{P} = -(e\mathbf{H}/c) \wedge \mathbf{r}.$$

La condition de quantification s'écrit alors

$$\int (\mathbf{P} - e\mathbf{A}/c) . \mathrm{d}\mathbf{r} = -e/c \int \mathbf{H} \wedge \mathbf{r} . \mathrm{d}\mathbf{r} - e/c \int \mathbf{A} . \mathrm{d}\mathbf{r} = (n + 1/2)\, h.$$

Or

$$\int \mathbf{H} \wedge \mathbf{r} . \mathrm{d}\mathbf{r} = \int \mathbf{H} . \mathbf{r} \wedge \mathrm{d}\mathbf{r} = \mathbf{H} \int \mathbf{r} \wedge \mathrm{d}\mathbf{r}$$

$$= -2\mathbf{H}\, \overrightarrow{(\text{aire de l'orbite})} = -2\,\Phi$$

avec une convention convenable de signe, Φ étant le flux magnétique traversant l'orbite de l'électron.

D'autre part $\int \mathbf{A} . \mathrm{d}\mathbf{r} = \Phi$ avec la même convention de signe.

Il vient donc

$$e/c\,\Phi = (n + 1/2)\, h$$

ou

$$\boxed{\Phi = (n + 1/2)\, hc/e.}$$

Seules sont possibles les orbites électroniques dont la surface est $(n + 1/2)\, hc/eH$.

L'électron que nous considérons est représenté dans l'espace P par un point situé sur la courbe d'énergie $E(\mathbf{P}) =$ Constante. Sa vitesse **v** dans l'espace réel est $\mathbf{v} = \operatorname{grad}_{\mathbf{P}} (E)$ et se trouve donc dirigée normalement à la courbe d'énergie constante. La force $\mathbf{F} = (e\mathbf{v}/c) \wedge \mathbf{H}$ est donc tangente à cette courbe. Comme $\mathbf{F} = \mathrm{d}\mathbf{P}/\mathrm{d}t$, il en résulte que le point représentatif de l'électron dans l'espace P se déplace le long de la courbe $E(\mathbf{P}) =$ Cte avec une vitesse égale à eH/c fois la vitesse de l'électron dans l'espace réel, et normale à cette dernière.

La trajectoire de l'électron dans l'espace réel est donc semblable à la courbe d'énergie constante, dont elle se déduit par une homothétie de rapport c/eH et une rotation de $\pi/2$.

Par conséquent, pour l'électron en présence de champ magnétique, les seuls niveaux d'énergie possibles sont ceux pour lesquels la surface de la courbe d'énergie constante est égale à

$$(eH/c)^2\, (n + 1/2)\, hc/eH = (n + 1/2)\, ehH/c.$$

Nous avons vu précédemment que c'est seulement par son influence sur les électrons voisins du niveau de Fermi que le champ magnétique modifie l'énergie électronique totale. Il en résulte par conséquent que, si Σ est la surface de la courbe de Fermi $E(\mathbf{P}) = \varepsilon_0$,

l'énergie électronique totale subira des variations périodiques en fonction du champ magnétique, des points équivalents étant atteints dans les divers cycles chaque fois que

$$\Sigma = (n + 1/2)\, ehH/c, \quad \text{ou} \quad 1/H = (n + 1/2)\, eh/c\Sigma$$

La variation du moment magnétique du gaz, en fonction de $1/H$, présente donc une périodicité constante.

De la mesure de cette période $eh/c\Sigma$ on déduit immédiatement la surface Σ de la courbe de Fermi.

C'est ce résultat général qui donne à l'effet De Haas-Van Alphen son importance pour la détermination de la surface de Fermi.

Modèle tridimensionnel. — L'extension de ce raisonnement à un métal réel tridimensionnel est immédiate. La trajectoire du point représentatif de l'électron dans l'espace P ne sera pas modifiée par l'introduction d'une troisième dimension à laquelle le champ magnétique est parallèle. Aucune quantification n'intervenant dans cette direction, cette trajectoire sera l'intersection de la surface d'énergie constante avec un plan perpendiculaire au champ. De sorte que, en ce qui nous intéresse, on peut considérer le solide réel comme une pile de solides bidimensionnels, possédant chacun une courbe de Fermi propre, dont la surface Σ dépend de la composante $\mathbf{P}_H$ parallèle à $\mathbf{H}$ du vecteur impulsion $\mathbf{P}$ de l'électron.

Il en résulte une énergie totale U dont la variation en fonction de $1/H$ comprendra un spectre continu de périodicités. Mais le comportement périodique ne sera pas totalement éliminé, car il y aura en général une valeur $\mathbf{P}_{H_0}$ de $\mathbf{P}_H$ pour laquelle Σ sera maxima ou minima, et la contribution des électrons de cette région de la zone de Brillouin dominera et imposera sa propre périodicité à la variation de U et du moment magnétique. Les oscillations De Haas-Van Alphen observées dans un métal réel doivent par conséquent être les mêmes que celles d'un modèle bidimensionnel ayant une courbe de Fermi identique à la section extrêmale de la surface de Fermi du métal réel.

Conditions favorables à l'observation de l'effet De Haas-Van Alphen

Nous avons indiqué que l'on doit s'attendre à ce que, dans un métal réel, l'effet De Haas-Van Alphen soit influencé de façon appréciable par l'élargissement des niveaux dû aux collisions entre l'électron et le réseau, et par le « flou » introduit dans la surface de Fermi par l'excitation thermique. Ces deux facteurs contribuent évidemment à atténuer les oscillations périodiques du moment magnétique. Il est donc clair *a priori* que de bonnes conditions d'observation de l'effet De Haas-Van Alphen ne seront atteintes que :

— pour des métaux assez purs (pour lesquels le temps moyen τ qui s'écoule entre deux collisions électron-réseau est grand) ;

— pour des températures très basses (le calcul montre qu'il intervient un facteur $e^{-2\pi^2 KT/\mu^* H}$ dans l'expression de l'amplitude de l'effet [4]. L'effet sera d'autre part d'autant plus facilement observable que la périodicité en $1/H$ sera grande (puisque $|\Delta(1/H)| = \Delta H/H^2$. Or cette périodicité est $\Delta(1/H) = eh/c\Sigma$. Les conditions les plus favorables d'observation correspondront par conséquent à de petites valeurs de la surface Σ de la courbe de Fermi. Dans le cas du gaz bidimensionnel d'électrons libres, on a $\Sigma = 2\pi m^* \varepsilon_0$. Les conditions favorables d'observation sont donc réunies :

— lorsque la masse effective des électrons est petite ;

— lorsque le niveau de Fermi est bas, c'est-à-dire lorsque le nombre d'électrons libres est faible. Ces résultats sont tout à fait généraux, et l'on doit *s'attendre à ce que l'effet De Haas-Van Alphen n'apparaisse que dans les métaux contenant, en très petit nombre, des porteurs libres de très faibles masses effectives.*

Si l'on prend, à titre d'exemple, le cas du cuivre, en supposant que ses électrons constituent un gaz idéal de porteurs libres, on aura $8{,}5 \cdot 10^{22}$ électrons par cm³, avec, pour la sphère de Fermi, un rayon $1{,}4 \cdot 10^{-19}$ g.cm/sec dans l'espace P. On en tire une périodicité en $1/H$ de $1{,}7 \cdot 10^{-9}$ gauss^{-1}, c'est-à-dire que, même pour un champ atteignant 10^5 gauss, les oscillations en $1/H$ n'auront qu'une période de 17 gauss. Il est donc clair que dans ce cas seule une technique hautement raffinée permettra de déceler l'effet. Ceci explique que l'on ait pensé pendant longtemps que seul le bismuth réunissait les diverses conditions requises pour l'observation de l'effet De Haas-Van Alphen. Pourtant Marcus [5] montra en 1947 que le zinc présentait aussi un notable effet De Haas-Van Alphen. Puis Shoenberg [4], de 1949 à 1952, décela cet effet dans une impressionnante série de solides (Ga, Sn, graphite, Cd, In, Sb, Al, Hg, Tl) tandis que Verkin, Lazarev et Rudenko [6] l'observaient également dans l'étain, le cadmium, l'indium et l'antimoine, ainsi que dans le magnésium et le béryllium. Enfin plus récemment Berlincourt [7] montrait son existance dans l'arsenic, et Shoenberg le mettait en évidence dans le plomb [8]. Par contre, les tentatives effectuées sur le cuivre, l'or, l'argent, le germanium, le tellure [4], le sodium, et le nickel [8] se sont jusqu'à présent révélées négatives.

Technique expérimentale

Les premières expériences de De Haas et Van Alphen sur le bismuth utilisaient la méthode de Faraday de mesure des susceptibilités. Mais cette méthode, comme d'ailleurs toutes les méthodes usuelles de mesure directe des susceptibilités, a le gros inconvénient de nécessiter un champ magnétique inhomogène : de sorte que la variation du champ dans le volume occupé par l'échantillon étudié fait disparaître les oscillations de courte période.

La méthode généralement utilisée aujourd'hui fut mise au point par Shoenberg en 1939 [9]. Elle consiste à mesurer, non pas la variation de la susceptibilité, mais la variation de l'anisotropie magnétique en fonction du champ, ce qui revient au même, à quelques détails de calcul près. Le cristal étudié est suspendu dans un champ magnétique homogène à un fil de torsion de façon telle que deux de ses axes magnétiques soient horizontaux. En l'absence de champ, l'un de ces axes fait un angle ψ connu avec la direction du champ. En présence du champ le cristal est soumis à un

couple $C = -\partial U/\partial\psi$, U étant l'énergie libre électronique totale, et ce couple, mesuré d'après la variation $\Delta\psi$ de l'angle ψ, a la même périodicité que l'énergie U. L'étude de la variation, en fonction de $1/H$ du couple C, permet donc d'obtenir la valeur de $eh/c\Sigma$. En donnant à ψ toutes les valeurs possibles, on obtiendra l'aire Σ de la section de la surface de Fermi par des plans ayant toutes les orientations possibles, ce qui permettra de déterminer l'ensemble de la surface de Fermi.

Cette méthode a évidemment l'inconvénient qu'aucune mesure de l'effet De Haas-Van Alphen n'est possible quand le champ est parallèle à l'un des axes magnétiques du cristal puisque le couple créé par le champ magnétique est nul dans ce cas. Mais on a constaté en général que le couple peut encore être détecté pour des valeurs extrêmement faibles (inférieures à 1°) de l'angle entre le champ et l'axe magnétique. On ne s'attendrait pas d'autre part à pouvoir observer par cette méthode l'effet De Haas-Van Alphen dans un cristal cubique. Il a pu cependant être mis en évidence dans l'aluminium. C'est que, même dans un cristal cubique, la surface de Fermi peut ne pas avoir une symétrie sphérique de sorte qu'une anisotropie magnétique peut être créée par l'effet De Haas-Van Alphen lui-même.

Le principal défaut de cette méthode de torsion tient à ce qu'il est délicat de maintenir la constance d'un champ magnétique uniforme allant parfois jusqu'à 20 000 gauss. Il serait d'autre part désirable, comme on l'a vu, pour déceler des oscillations de très courtes périodes, de pouvoir utiliser des champs de l'ordre de 100 000 gauss. Shoenberg a récemment mis au point [8] une technique ingénieuse de mesure pour de très hauts champs magnétiques. Le spécimen, constitué par un très fin filament monocristallin, est placé à l'intérieur d'un solénoïde refroidi à l'air liquide. Un condensateur de 1 000 μF est chargé à 1 750 V puis déchargé dans le solénoïde. On obtient ainsi un champ de l'ordre de 10^5 gauss, qui est uniforme dans un volume de quelques millimètres de diamètre et de 1 cm de long. Le champ atteint sa valeur maxima puis décroît jusqu'à zéro en quelques millièmes de seconde. Pendant la décroissance du champ, l'intensité d'aimantation du spécimen subit des variations périodiques de très haute fréquence dues à l'effet De Haas-Van Alphen. Ces variations produisent, dans une petite bobine « pick-up » placée autour de l'échantillon, des forces électro-motrices oscillantes de très haute fréquence, qui sont amplifiées. On obtient simultanément sur un oscillographe les courbes donnant la variation du champ et de ces forces électro-motrices, en fonction du temps.

L'effet De Haas-Van Alphen a ainsi été étudié par Shoenberg pour l'étain, et découvert dans le plomb. Mais les essais effectués avec le cuivre, l'argent, l'or, le sodium, et le nickel se sont encore révélés négatifs. La période des oscillations, dans le cuivre par exemple, est pourtant probablement assez grande pour que l'effet puisse être détecté avec des champs 100 000 gauss. La cause de cet échec doit peut-être être recherchée dans l'inconvénient majeur de la méthode, qui est constitué par les courants induits dans le métal lui-même. Ces courants élèvent la température et créent en outre des champs perturbateurs qui tendent à faire disparaître les oscillations de l'aimantation du spécimen. Ceci oblige à utiliser des échantillons formés de fil très fin (pour diminuer l'effet de peau), mais aussi, dans une large mesure, à espérer que la magnétorésistance affaiblit suffisamment ces courants induits. Le plomb et l'étain possèdent précisément un effet magnéto-résistant considérable.

Résultats

L'effet De Haas-Van Alphen, nous l'avons noté, s'est révélé être un effet assez commun alors que les prévisions que l'on pouvait faire *a priori* semblaient devoir le limiter à quelques cas très particuliers, comme le bismuth, où le nombre « effectif » et la masse effective des porteurs sont très faibles. En fait l'interprétation des résultats expérimentaux a effectivement conduit en général à de petits nombres de porteurs et à de faibles masses effectives pour les divers métaux où cet effet a pu être décelé. Ces faibles valeurs étaient tout à fait inattendues et peu vraisemblables.

On a ainsi été amené à penser que l'effet observé ne correspond pas, dans la plupart des cas, à la véritable surface de Fermi de ces métaux. Ce sont des « poches » constituées de trous dans les coins des zones de Brillouin inférieures (zones complètement remplies par ailleurs) qui en sont probablement responsables. On sait en effet que, lorsque deux ou plusieurs bandes d'énergie se recouvrent partiellement, une zone de Brillouin peut commencer à se remplir, et même se remplir plus ou moins complètement, sans que la zone précédente soit pleine. La surface de Fermi est alors en quelque sorte fragmentée en plusieurs éléments de surface, situés dans différentes zones. Le nom de surface de Fermi reste en fait généralement au plus important de ces éléments, situé dans la zone supérieure. Toutefois les « poches de trous » ainsi formées dans les coins des zones inférieures sont limitées par des surfaces d'énergie constante dont les propriétés sont les mêmes que celles de la surface de Fermi. Ces surfaces peuvent en particulier jouer un rôle appréciable dans l'effet De Haas-Van Alphen. Leur aire est faible, puisque les poches de trous sont petites. La masse effective des trous, d'autre part, est également faible en général dans les coins supérieurs d'une zone de Brillouin, et les trous sont eux-mêmes peu nombreux. Les périodes d'oscillation de l'effet De Haas-Van Alphen correspondant seront donc assez longues pour pouvoir être observées dans des conditions relativement usuelles. Il est ainsi compréhensible que l'effet De Haas-Van Alphen, dont la manifestation semble *a priori* requérir des conditions expérimentales assez exceptionnelles, ait pu, sans difficultés majeures, être observé dans un grand nombre de métaux. L'hypothèse des poches de trous est confirmée par le fait que les oscillations de grande période ont généralement pu être interprétées à l'aide de surfaces d'énergie constante ellipsoïdales, approximation qui n'est vraisemblablement acceptable que pour de petits nombres de porteurs au voisinage des coins d'une zone de Brillouin. Les résultats expérimentaux relatifs au zinc, à l'étain, et au mercure, correspondent certainement à une telle structure des surfaces d'énergie. Pour l'étain, les ellipsoïdes sont très allongés. Ils deviennent pratiquement cylindriques dans le cas du graphite et du cadmium (quoique subsistent, pour le cadmium, d'assez nombreux points obscurs).

Il est intéressant de noter que divers chercheurs [10] ont observé, à basse température, dans le bismuth et le graphite, des oscillations de l'effet Hall, de la magnétorésistance, de l'effet thermo-électrique, et de la conductivité thermique, en fonction de l'inverse du champ magnétique, de mêmes périodes que les oscillations de la susceptibilité magnétique. L'origine commune de ces divers effets et de l'effet De Haas-Van Alphen n'est pas douteuse, et l'identité des périodes montre bien que ce sont les mêmes porteurs de charges, situés dans les mêmes coins de zones de Brillouin, qui contribuent à tous ces effets.

Toutefois, malgré la relative abondance des données expérimentales déjà recueillies, la détermination complète de la surface de Fermi n'a pu encore être effectuée pour aucun métal à l'aide de l'effet De Haas-Van Alphen. Dans la plupart des cas on en est encore au stade des investigations préliminaires. L'étude complète de l'effet, dans un seul métal, est très longue et plutôt fastidieuse, et jusqu'à présent, outre les métaux déjà cités, seuls le gallium, l'antimoine et l'arsenic ont été examinés de façon un peu approfondie.

Les résultats sont complexes, des oscillations de périodes très différentes se manifestant à la fois (4.10^{-5} et 6.10^{-7} gauss^{-1} pour l'arsenic par exemple), et il semble certain que les oscillations de courte période (larges portions de la surface de Fermi) ne pourront pas être interprétées par un modèle de surfaces d'énergie aussi simple que le modèle ellipsoïdal : constatation qui n'a rien d'inattendu.

Il se peut que l'invention de surfaces d'énergie plausibles, capables de rendre compte des résultats expérimentaux, demande d'appréciables efforts d'imagination. Mais rien ne permet actuellement de penser que la théorie puisse être sérieusement en défaut : c'est ainsi que toutes les oscillations étudiées ont bien une périodicité constante en $1/H$. Il est donc sage, pour le moment, d'attribuer plutôt les échecs de l'interprétation (pour le cadmium par exemple) à un manque d'imagination qu'à une insuffisance de la théorie.

Les perspectives offertes par l'effet De Haas-Van Alphen dans l'étude de la surface de Fermi sont donc très prometteuses. D'autant plus d'ailleurs que Berlincourt et ses collaborateurs ont montré que les paramètres (énergie de Fermi, masse effective, etc...) de l'effet subissent des variations faibles mais mesurables, en fonction de la température et de la pression [12], [11]. Ces variations sont dues à de légers déplacements de la surface de Fermi par rapport aux zones de Brillouin, consécutifs aux déformations de celles-ci par suite de la dilatation ou de la compression du réseau cristallin. De nouvelles vérifications de la forme et de la position de la surface de Fermi sont ainsi rendues possibles.

Il est donc souhaitable que, malgré les difficultés techniques dans ce domaine, les investigations déjà entamées soient largement poursuivies et complétées. Les résultats d'une expérimentation soigneuse et patiente projetteront sans doute une lumière nouvelle sur la structure électronique des métaux.

Manuscrit reçu le 18 *janvier* 1957.

BIBLIOGRAPHIE

[1] de Haas (W. J.) et van Alphen (P. M.), *Commun. Phys. Lab. Univ.*, Leiden, 1930, **212** ; 1932, **220**.
[2] Peierls (R.), *Z. Physik*, 1933, **81**, 186.
[3] Blackman (M.), *Proc. Roy. Soc.*, London, 1938, A **166**, 1. Dingle (R. B.), *Proc. Roy. Soc.*, London, 1952, A **211**, 500 et 517. Onsager (L.), *Phil. Mag.*, 1952, **43**, 1006. Voir aussi Landau (L.) (cf. réf. 9).
[4] Shoenberg (D.), *Phil. Trans. Roy. Soc.*, London, 1952, A **245**, 1.
[5] Marcus (J. A.), *Phys. Rev.*, 1947, **71**, 559.
[6] Verkin (B. I.), Lazarev (B. G.) et Rudenko (N. S.), *Doklady Akad. Nauk.*, U. R. S. S., 1949, **69**, 773 ; *J. Exp. Theor. Phys.*, U. R. S. S., 1950, **20**, 93 et 995 ; 1951, **21**, 658.
[7] Berlincourt (T. G.), *Phys. Rev.*, 1953, **92**, 1068 ; 1955, **99**, 1716.
[8] Shoenberg (D.), *Physica*, 1953, **19**, 791.
[9] Shoenberg (D.), *Proc. Roy. Soc.*, London, 1939, A **170** ; 341.
[10] Berlincourt (T. G.) et Steele (M. C.), *Phys. Rev.*, 1955, **98**, 956.
[11] Berlincourt (T. G.) et Steele (M. C.), *Phys. Rev.*, 1954, **95**, 1421.
[12] Overton (W. C.) et Berlincourt (T. G.) *Phys. Rev.*, 1955, **99**, 1165.
[13 Pippard (A. B.), Rapports et Discussions du Xe Conseil de Physique Solvay (Bruxelles, 1954), p. 123.

INFORMATION

RÉFÉRENDUM SUR L'ÉCHELLE DES POIDS ATOMIQUES

L'Union Internationale de Chimie Pure et Appliquée est appelée à prendre une décision lors de la réunion de la XIXe Conférence de l'Union, en juillet prochain, quant au choix de l'échelle à adopter pour la détermination des Poids Atomiques. Une grande divergence d'opinions s'étant manifestée, les membres de la Commission des Poids Atomiques ont décidé qu'une consultation serait entreprise dans tous les pays membres de l'Union. C'est en tant que membre de cette Commission que je suis chargée de cette enquête en France.

L'emploi d'échelles différentes pour la physique et pour la chimie me semble personnellement anormal, alors que ces deux sciences s'interpénètrent, et que la spectrographie de masse à permis de montrer l'imprécision de l'échelle chimique. Malgré les perturbations certaines, mais temporaires, que l'adoption d'une échelle commune pourrait amener, cette solution m'apparaît comme souhaitable. Aucune solution n'est parfaite, mais il me semble que le choix de $^{16}O = 16{,}0000$ présente certains avantages.

Ce n'est pas une opinion personnelle qui doit être transmise au Comité ; aussi, Physiciens et Chimistes sont-ils instamment priés d'envoyer leur avis à :

Mademoiselle M. PEREY, *Professeur de Chimie Nucléaire*, 4, *rue Gœthe, Strasbourg* (*Bas-Rhin*), en portant sur l'enveloppe la mention : P. A.

Le Professeur WICHERS, Président de la Commission des Poids Atomiques I. U. P. A. C., a donné son avis dans le *Journal of the American Chemical Society*, vol. **78**, 24 juillet 1956, n° 14, p. 3235-3240.

Seule la partie concernant le problème des échelles est retranscrite ici.

Rapport sur les poids atomiques pour 1954-1955, par **E. Wichers,** traduit de *J. Amer. Chem. Soc.*, 24 juillet 1956, vol. **78**, fasc. **14**, p. 3235-3240.

Introduction. — La première partie de cet article reproduit mot pour mot les paragraphes du rapport de la Commission des poids atomiques, présenté à l'Union internationale de Chimie pure et appliquée, à Zurich, en juillet 1955, qui traite de la révision des poids atomiques de douze éléments et contient la nouvelle table internationale.

La commission attirait aussi l'attention sur les problèmes posés par la coexistence de deux échelles de poids atomiques : *l'échelle chimique*, dont la base est l'oxygène naturel et l'*échelle physique* qui prend pour base le principal isotope de l'oxygène ^{16}O. La commission invite les intéressés à prendre en considération ce problème et les solutions possibles.

Nous attirons l'attention des lecteurs de ce *Journal* sur la seconde partie du présent rapport intitulée : « *Le problème des deux échelles.* » Elle pose le problème d'une façon capable de stimuler leur intérêt.

Le problème des deux échelles. — Quand Giauque et Johnston ont découvert, en 1929, les isotopes ^{17}O et ^{18}O [1] le travail de comparaison précise des masses des différents nucléides était en cours [2].

On trouva naturel de comparer ces masses à celle de l' « oxygène », prise égale à 16, puisque c'était la base du système des poids atomiques. Lorsque la composition isotopique de l'oxygène fut connue, il apparut immédiatement que l'échelle utilisée en spectroscopie de masse n'était pas identique à celle des poids atomiques, puisque la comparaison s'y faisait avec le principal isotope de l'oxygène et non avec la masse moyenne des trois variétés isotopiques.

On ne semble néanmoins pas avoir reconnu clairement que cette situation pouvait conduire à des ambiguïtés, ou même à des confusions, dues à l'existence de deux échelles aussi voisines. La citation suivante du Rapport de la Commission internationale des Poids atomiques pour 1931 [3] dit comment la question se posait à cette époque :

« *La découverte des isotopes de l'oxygène a conduit à une situation regrettable où la chimie et la physique emploient deux échelles différentes pour les poids atomiques. En conséquence, la question d'un étalon absolu a déjà été plus ou moins largement discutée et diverses propositions ont été faites, notamment :*
$^{1}H = 1{,}00000$ $^{4}He = 4{,}00000$ $^{16}O = 16{,}0000$
ainsi que l'étalon chimique actuel $O = 16{,}0000$.

F. W. Aston, après une discussion approfondie de la question devant la British Association en 1931, conclut qu'il est judicieux pour les chimistes de conserver l'étalon chimique actuel, qui satisfait amplement leurs exigences en ce qui concerne la précision des poids atomiques internationaux. Pour celles, plus sévères de la physique, l'isotope ^{16}O *de l'oxygène lui paraît un meilleur étalon. L'inconvénient de la différence d'un à deux dix-millièmes entre les deux échelles, différence sujette, de plus, à révision continuelle, ne lui semble pas particulièrement importante. La confusion entre elles s'évite aisément en parlant, dans le premier cas, du* « poids atomique du chlore » *et, dans le second du* « poids de l'atome de chlore 35 ».

Le comité adopte à l'unanimité l'opinion d'Aston, et ne voit pas de raison pour proposer un changement de l'étalon actuel des poids atomiques, $O = 16{,}0000$. »

D'après nos connaissances actuelles sur la composition isotopique de l'oxygène naturel, les échelles phy-

sique et chimique diffèrent de près de trois dix-millièmes, et non de un ou deux, comme on le croyait en 1931. Depuis 1940, la Commission Internationale emploie le diviseur 1,000275 pour transposer les données de l'échelle physique à l'échelle chimique.

On sait aussi maintenant que la composition isotopique d'oxygène naturel varie légèrement suivant son origine. Il en résulte que, si l'échelle chimique est basée sur l'oxygène naturel, sans autre précision, elle diffère de l'échelle physique d'un facteur qui varie de 1,000268 à 1,000278 [6]. Selon l'usage de la Commission internationale, cependant, l'oxygène de l'échelle chimique des poids atomiques est devenu le mélange d'isotopes de cet élément dont la masse moyenne est 1,000275 fois celle de ^{16}O. Pour remédier à l'imprécision de l'échelle chimique due à sa base variable, il suffirait de confirmer cet usage par une définition formelle.

Dans ces dernières années, la Commission internationale a envisagé d'adopter cet amendement de l'échelle chimique, mais a conclu qu'avant de franchir ce pas la possibilité d'unifier les deux échelles devait être reconsidérée.

Il convient maintenant d'indiquer que la variation de la composition isotopique de l'oxygène n'a eu pratiquement aucun effet sur les valeurs des poids atomiques publiées dans les tables internationales, et cela pour trois raisons principales. Pour ceux des poids atomiques déduits de mesures stoechiométriques ou de comparaison des densités gazeuses, les incertitudes expérimentales sont dans la plupart des cas supérieures, d'un ordre de grandeur aux variations connues de composition de l'oxygène naturel. De plus, quelques-unes seulement des valeurs actuelles dérivent de comparaisons directes avec l'oxygène. La plupart résultent de comparaisons avec l'argent, le chlore et le brome, trois éléments qui ont été comparés entre eux dans toute une série de mesures très précises. Leur comparaison à l'oxygène repose principalement sur le rapport $AgNO_3/Ag$. Cette comparaison a été faite avec une grande perfection par Richards et Forbes [4] il y a environ cinquante ans, avec des résultats confirmés par plusieurs travaux ultérieurs. Bien que le travail sur l'argent soit d'une grande précision, et que la concordance des valeurs trouvées par plusieurs chercheurs confirme la grande exactitude du résultat, il est improbable que l'ignorance de la composition isotopique de l'oxygène (et de l'argent) au moment de cette détermination contribue de façon appréciable à son incertitude. Comme la plupart des valeurs couramment admises pour les poids atomiques s'appuient sur des comparaisons avec l'argent et le chlore, ou l'argent et le brome, elles comprennent les erreurs expérimentales des comparaisons secondaires ajoutées à celles des nombres de référence secondaires.

En plus des poids atomiques déterminés par voie chimique qui ne sont pas directement basés sur l'oxygène, il y en a maintenant 36 [5] qui dérivent principalement ou entièrement de mesures au spectroscope de masse ou de calculs nucléaires : ces 36 poids atomiques ont donc pour base l'isotope ^{16}O, et non l'oxygène naturel. De cette brève revue des origines des valeurs couramment admises pour les poids atomiques, on peut conclure que les inconvénients de l'emploi de l'oxygène naturel comme base sont plutôt d'ordre logique que pratique. Cette situation pourra cependant changer, lorsque les poids atomiques seront connus avec une plus grande précision.

Il convient de ne pas clore cette partie de la discussion sans examiner brièvement le cas des quelques 50 valeurs de la Table internationale qui proviennent encore de méthodes chimiques ou de mesures de densités gazeuses. Les différences entre ces valeurs et celles données par les « meilleures » mesures physiques, rassemblées par A. O. Nier [6], ne sont pas grandes : à part 9 exceptions, elles ne dépassent pas deux dix-millièmes. Une détermination plus exacte de ces différences exigerait des méthodes chimiques plus précises, ou une mesure plus précise des abondances isotopiques. Il est intéressant de signaler que, pour quelques éléments qui, comme l'argent, le chlore et le brome existent dans la nature sous deux formes isotopiques d'abondance à peu près égale, les poids atomiques chimiques, joints aux masses des isotopes obtenues par méthodes physiques donnent une connaissance des abondances isotopiques plus précise que celle tirée des mesures directes au spectroscope de masse.

Voyons maintenant ce qu'on pourrait faire pour unifier les deux échelles. La solution est, en principe très simple : il suffit, pour obtenir une échelle unique, de se mettre d'accord sur une substance de référence unique et d'attribuer une valeur unique à la masse qui lui correspond. Le choix de la substance n'a pas très grande importance, pourvu que sa masse soit fixe et puisse être comparée de façon sûre avec celles des autres. Si la substance de référence était l'isotope ^{16}O, et si on lui assigne la masse exacte 16, cela revient à abandonner l'échelle chimique en faveur de l'échelle physique. Le poids atomique de l'oxygène naturel serait alors 16,0044, avec des variations de la décimale suivante, et tous les poids atomiques de la Table internationale usuelle seraient accrus dans la même proportion. Inversement, si l'échelle physique était amalgamée à l'échelle chimique existante, la masse de l'isotope ^{16}O deviendrait voisine de 15,9956 au lieu de 16, et toutes les masses actuellement rapportées à l'échelle physique diminueraient dans le même rapport.

Les difficultés présentées par un tel passage du double système actuel à une échelle unique sont considérables. Si l'on décide ce passage, il y aura une période de confusion inévitable, jusqu'à ce que ceux dont les nombres habituels auront été écartés s'habituent à employer les autres. Il y aura aussi, et surtout, la pénible nécessité de réviser toutes les données et références importantes reliées à l'échelle abandonnée. Si l'on fait le bilan des deux opérations, l'abandon de l'échelle chimique semble la plus difficile : il suffit de considérer le grand nombre de manuels de chimie, de recueils et de tables où les poids atomiques et moléculaires forment une partie importante du contenu. De plus la littérature périodique contient un très grand nombre de données physico-chimiques relativement bien établies données par équivalent ou par mole, et pour des concentrations rapportées à ces quantités. Beaucoup de ces données sont d'une précision suffisante pour qu'une variation systématique de près de trois dix-millièmes ne puisse être négligée. Au contraire, les données basées sur l'échelle physique subissent encore de fréquentes révisions, et les scientifiques qui les utilisent doivent certainement être bien moins nombreux que ceux qui emploient l'échelle chimique.

L'alternative de l'abandon des deux échelles existantes, et de leur remplacement par une nouvelle, ne doit pas être rejetée sans examen, particulièrement si on pouvait choisir une masse de référence qui n'ait pas d'inconvénient logique ni pratique, et qui diminuerait les corrections des données publiées. Le rapport de 1931 de la Commission internationale mentionne deux échelles nouvelles.

L'une emploie le nombre exact 1 comme masse relative de ^{1}H [7]. L'adoption de cette échelle changerait toutes les données relatives aux masses des atomes de 8 pour mille environ, changement sans doute assez radical pour diminuer les risques de confusion.

Ce projet ferait disparaître les curieux défauts de masse négatifs attribués actuellement à la grande majorité des nucléides. Néanmoins, avec cette échelle les défauts de masse des éléments lourds deviendraient tellement grands que leurs nombres de masse, qui nous sont familiers et servent constamment, présenteraient avec leurs masses atomiques des différences atteignant deux unités.

Une échelle basée sur la masse 4 relative à ^{4}He ne paraît, dans l'état actuel de nos connaissances, présenter d'avantage sur aucune de celles en usage et modifierait de 1 pour mille tous les nombres des deux échelles.

Une échelle basée sur l'isotope 19 du fluor, auquel on attribuerait la masse exacte 19, paraîtrait offrir des possibilités plus attrayantes [8]. Dans la Table internationale courante, le poids atomique du fluor (qui n'a pas d'autre isotope naturel connu) est égal à 19, mais sa valeur plus exacte est $18{,}9992 \pm 0{,}0002$ [6]. L'adoption du nombre exact 19 pour le fluor augmenterait donc tous les nombres reliés à l'échelle chimique usuelle d'un vingt-cinq millième. Un changement de cet ordre pourrait être négligé pour la plupart des données de la chimie, et la révision précise des livres, etc... pourrait se faire tranquillement, sans trop de confusion. Dans l'échelle physique courante, la masse de ^{19}F est 19,0044. La ramener à 19 produirait une baisse de toutes les masses de cette échelle de deux dix millièmes environ, dont la valeur obligerait, naturellement, à une révision de toutes les tables. Pourvu que la comparaison avec les autres variétés nucléaires n'offre pas d'obstacle insurmontable, une échelle basée sur $^{19}F = 19$ pourrait paraître plus acceptable aux physiciens qu'une autre basée sur une valeur non entière, comme 15,9956 pour ^{16}O.

Si on peut arriver à décider d'unifier, d'une manière ou d'une autre, les échelles physique et chimique, il sera probablement souhaitable de fixer un délai pour le changement, de façon à ce que les auteurs, rédacteurs et éditeurs soient prévenus. Si on n'arrive pas à une telle décision, il faudra prendre toutes les mesures possibles pour diminuer les confusions et les malentendus.

Dans les travaux scientifiques, le contexte devrait indiquer clairement l'échelle utilisée. On reconnaît immédiatement que toutes les données sur les masses de nucléides particuliers et les quantités qui leur correspondent se rapportent à l'échelle physique. De même, toutes les données atomiques et moléculaires classiques de la chimie se rapporteraient à l'échelle chimique. Dans les cas limitrophes, comme les sujets concernant les nombres de Faraday ou d'Avogadro, il serait possible d'établir une règle constante pour utiliser toujours la même échelle. Des efforts bien dirigés et appliqués dans ce sens rendraient la situation tolérable.

Il reste seulement à inviter de nouveau ceux que ce problème concerne à le considérer avec l'attention la plus sérieuse et la plus objective. Leur opinion sera la bienvenue.

NOTES

[1] Giauque (W. F.) et Johnston (H. L.), *J. Amer. Chem. Soc.*, 1929, **51**, 1436, 3528.

[2] Les physiciens emploient les termes *masse atomique* ou *masse isotopique* plutôt que *poids atomique*. Cela convient particulièrement à des déterminations qui ne reposent pas sur des pesées. C'est également correct pour l'usage chimique, car la propriété en question est d'habitude la masse plutôt que la force exercée sur elle dans un champ de gravitation : on utilisera indifféremment les deux expressions dans ce rapport. Pour les éléments à plusieurs isotopes, il serait plus correct de dire masse (ou poids) atomique moyenne, mais il n'apparaît pas que la désignation habituelle des chimistes ait jamais produit la moindre confusion.

[3] Baxter (G. P.), Curie (M.), Hönigschmid (O.), Le Beau (P.) et Meyer (R. J.), *J. Amer. Chem. Soc.*, 1932, **54**, 1269.

[4] Richards (T. W.) et Forbes (G. S.), *Publ. Carnegie Inst.*, Washington, 1907, n° **69**, 47 ; *J. Amer. Chem. Soc.*, 1907, **29**, 808.

[5] Parmi ces 36, 18 sont des éléments qui n'ont qu'un seul isotope naturel connu : ils sont parfois dits *non isotopiques* ou *mono-isotopiques* désignation éthymologiquement défectueuse. H. E. Duckworth suggère (communication privée) *anisotopique*, par analogie avec d'autres termes scientifiques utilisant le préfixe *an*. L'adjectif *simple* a été également employé, mais n'a pas la spécificité d'anisotopique.

[6] Nier (A. O.), *Z. Elektrochem.*, 1954, **58**, (7), 559.

[7] Une échelle basée sur l'hydrogène a été préconisée par Dole en 1937 (*J. Chem. Phys.*, 1936, **4**, 268) comme conséquence de sa découverte des différences de composition isotopique entre l'oxygène de l'air et celui de l'eau du lac Michigan. Elle n'a pas eu l'approbation de la Commission Internationale (Baxler (G. P.), Hönigschmid (O.) et Le Beau (P.), *J. Amer. Chem. Soc.*, 1937, **59**, 219).

[8] L'idée a été suggéré par plusieurs personnes, en particulier J. I. Hoffman, Herbert J. Fleischmann et F. L. Mohler (communications privées).

LETTRE A LA RÉDACTION

BANDES INDUITES PAR LA PRESSION PRÈS DES RAIES DE RÉSONANCE DU MERCURE, EN ÉMISSION, EN PRÉSENCE DE GAZ RARES

Par Mme S. Robin et S. Robin,
Institut des Hautes Études, Dakar.

On sait qu'il apparaît près de certaines raies spectrales de divers métaux (notamment Hg et les métaux alcalins) et en présence de divers gaz (notamment les gaz rares), des bandes nouvelles attribuées aux interactions métal-gaz [1]. Des bandes de ce genre ont été observées notamment près de la raie de résonance 2 536,52 Å de Hg dans les spectres de fluorescence et d'absorption, mais en émission les observations n'ont été faites qu'avec He et A [2]. Il nous a semblé utile de reprendre cette question avec He, Ne, A, Kr, Xe en recherchant si les bandes observées en absorption ou en fluorescence près de la raie 2 536,52 Å apparaissaient aussi en émission et surtout si on peut observer des bandes comparables près de la raie de résonance 1 849,57 Å.

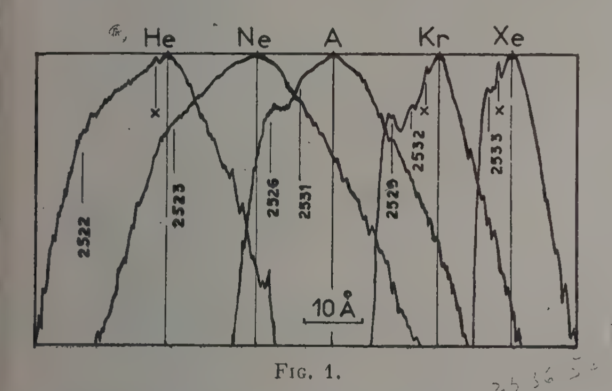


Fig. 1.

Le spectrographe à vide utilisé a été déjà décrit [3] ; il utilise un réseau en incidence normale de 1 mètre de rayon de courbure portant 1 200 traits au mm ; il a été réglé de telle sorte que les raies 2 536,52 Å et 1 849,57 Å puissent être photographiées simultanément. La source est entièrement en silice ; elle est constituée par un capillaire vu en bout et fermé par une fenêtre plane et parallèle soudée (transparente vers les courtes longueurs d'onde jusqu'à 1 580 Å) ; les entrées de courant traversent directement la silice ; un appendice latéral contient du mercure spécialement purifié et distillé sous vide ; un enroulement chauffant permet de faire varier la température de cette source ; les gaz rares sont des gaz spectroscopiquement purs fournis par la société l'Air Liquide ; les pressions utilisées sont de quelques cm de Hg (3 à 15 cm).

La figure 1 représente des enregistrements microphotométriques aux environs de la raie 2 536,52 Å ; la raie elle-même est très surexposée mais on y retrouve bien les bandes observées dans les spectres de fluorescence avec Kr et Xe. Avec He, la bande observée en absorption à haute pression [4] vers 2 522 Å n'est pas nette mais elle peut être responsable de la dissymétrie de ce profil. Avec Ne, un épaulement plus net fait penser à l'existence possible d'une bande non encore signalée, aux environs de 2 523 Å. Pour ces deux gaz (He [4] et Ne), les pointés sont imprécis mais il convient de remarquer malgré tout que l'écart entre le maximum de cette bande et celui de la raie 2 536,52 Å semble précisément intermédiaire entre ceux de He et A conformément à l'ordre des écarts décroissants généralement observés lorsqu'on passe de He à Xe [1]. La raie 2 534,8 Å marquée X qui apparaît sur plusieurs de ces profils est due à Hg.

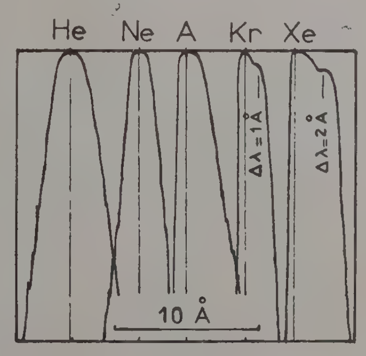


Fig. 2.

La figure 2 représente les environs de la raie 1 849,57 Å observés dans les mêmes conditions expérimentales mais avec des temps de pose plus longs, la raie elle-même étant encore très surexposée. Avec Xe on voit un épaulement très net qui peut être attribué à une bande située à environ 2 Å du maximum de la raie du côté des grandes longueurs d'onde ; avec Kr, cet épaulement n'est plus qu'à 1 Å du maximum et avec A, on n'observe plus d'épaulement mais seulement une dissymétrie qui disparaît avec Ne et He. Des temps de pose beaucoup plus longs n'ont pas permis de mettre en évidence des bandes plus éloignées. On pourrait penser à une réabsorption possible mais celle-ci est peu probable car les bandes signalées ici, observables à une température de la source peu supérieure à la température ambiante, continuent à être visibles quand on élève la température jusqu'à obtenir

une réabsorption du centre des raies de résonance. On sait que dans les observations faites jusqu'ici sur les bandes satellites avec les gaz rares, les écarts entre les bandes et le centre de la raie sont d'autant plus grands que l'atome perturbateur est plus léger [1]. Nos mesures sur la raie 1 849,57 Å semblent montrer que l'inverse est également possible. Toutefois des mesures en absorption à haute pression, plus sensibles puisque l'intensité de la bande peut dépasser celle de la raie [1] [4], permettront de conclure avec plus de certitude. Ces mesures sont actuellement en cours.

Lettre reçue le 26 avril 1957.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Voir par exemple Robin (S.) et Robin (Mme S.), *J. Physique Rad.*, 1956, **17**, 143.
[2] Preston (W. M.), *Phys. Rev.*, 1937, **53**, 298.
[3] Robin (Mme S.) et Robin (S.), *J. Physique Rad.*, 1956, **17**, 976.
[4] Robin (J.), *C. R. Acad. Sci.*, 1954, **238**, 1491.

INFLUENCE DE L'INTENSITÉ ET DU TEMPS D'EXCITATION SUR LES PROPRIÉTÉS PHOTODIÉLECTRIQUES DU SULFURE DE ZINC ACTIVÉ AU CUIVRE

Par B. Hagene et J. J. Le Fevre,
Laboratoire de Physique,
Faculté des Sciences de Rennes.

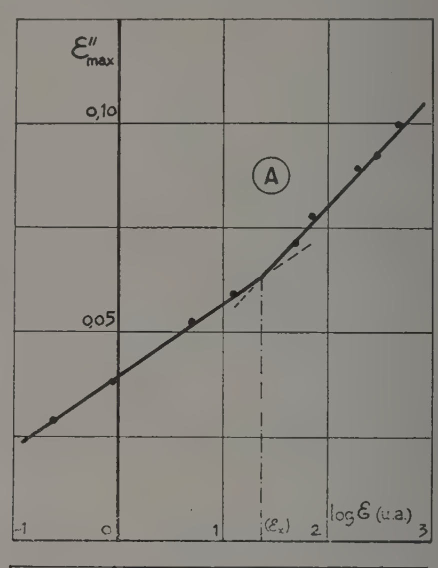
Excité en lumière de Wood, le sulfure de zinc activé au cuivre présente, *en fonction de la température*, une bande d'absorption hertzienne se déplaçant avec la fréquence de mesure [1]. De nombreux paramètres agissent sur l'amplitude de cette bande, et en particulier l'intensité de la lumière excitatrice et le temps d'irradiation.

L'influence de ces paramètres sur les pertes diélectriques a été étudiée, *à température ordinaire*, par Garlick [2] qui a mis en évidence une loi de la forme $\varepsilon'' = A \log (\mathcal{E}B + 1)$ ($\mathcal{E}$ = intensité d'excitation), et par Ruamps [3] qui a observé, pour tg δ, un maximum en fonction de l'intensité d'irradiation, ce maximum croissant et se déplaçant vers les fortes intensités quand la fréquence de mesure augmente.

Nous avons voulu étudier le rôle de l'énergie d'irradiation du sulfure de zinc luminescent sur l'*amplitude du maximum d'absorption diélectrique*, à une fréquence de mesure fixe (1 KHz).

Techniques. — L'échantillon étudié est un sulfure de zinc contenant 5.10^{-5} de cuivre, préparé par E. Grillot (Laboratoire de Luminescence, Paris). La poudre est placée entre les dents d'un condensateur en double peigne, sous vide [4]. On l'irradie à l'aide d'une lampe à vapeur de mercure à haute pression, à travers un filtre de Wood et une cuve à sulfate de cuivre (arrêtant une partie du rayonnement infra-rouge extincteur de l'effet photodiélectrique [5]). On modifie l'intensité d'irradiation par interposition de grilles étalonnées.

Influence de l'intensité d'exitation $\mathcal{E}$. — L'échantillon, refroidi à 80 °K, est irradié pendant 30 mn ; on mesure ensuite la variation des pertes diélectriques ε'' au réchauffement, soit en maintenant l'irradiation, soit à l'obscurité. On obtient ainsi une courbe ε'' (T) qui passe par un maximum dont l'amplitude croît avec l'intensité d'irradiation. En portant cette amplitude en fonction du logarithme de l'intensité d'excitation $\mathcal{E}$, on obtient *une droite qui présente une cassure* pour une certaine valeur $\mathcal{E}_x$ de l'intensité (*fig.* 1 A et 1 B).



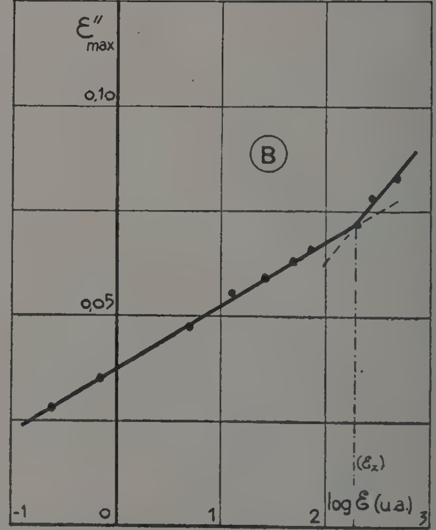


Fig. 1. — A, réchauffement sous irradiation ; B, réchauffement à l'obscurité.

Cette valeur $\mathcal{E}_x$ est beaucoup plus élevée dans le cas où le réchauffement est effectué à l'obscurité, que dans

[1] Ceci a été vérifié notamment pour la raie 2 536,52 Å de Hg, pour la raie 5 350 Å du Tl et pour les métaux alcalins [1].

celui où l'irradiation est maintenue. Notons cependant que les *pentes* des droites sont les mêmes dans les 2 cas.

L'équation des droites obtenues est de la forme :

$$\varepsilon''_{max} = k_1 \log (\mathcal{E} + b_1) + a_1 \qquad \mathcal{E} < \mathcal{E}_x$$

et

$$\varepsilon''_{max} = k_2 \log (\mathcal{E} + b_2) + a_2 \qquad \mathcal{E} > \mathcal{E}_x.$$

Les constantes b_1 et b_2 permettent de rendre compte de la valeur finie des pertes diélectriques à l'obscurité ($\mathcal{E} = 0$). Elles sont négligeables dans les limites de nos expériences où $\mathcal{E}$ leur est toujours très supérieure.

Influence du temps d'exitation θ. — L'échantillon, refroidi à 80 °K, est irradié (sous intensité constante) pendant un temps θ variant de 10 à 250 minutes, puis réchauffé à l'obscurité. En portant ε''_{max} (T) en fonction du logarithme du temps d'excitation, on obtient une droite dont la pente croît légèrement lorsque l'intensité d'irradiation utilisée augmente (*fig.* 2).

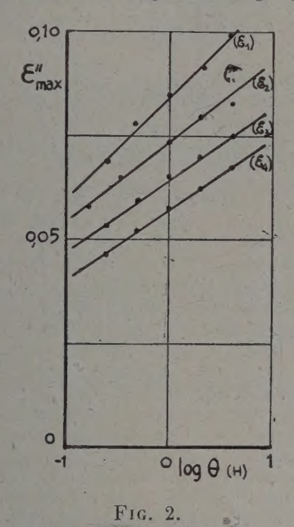


FIG. 2.

L'équation de ces droites est de la forme :

$$\varepsilon''_{max} = m \log (\theta + l) + n$$

où l (négligeable devant θ dans nos expériences) permet de rendre compte de la valeur finie des pertes diélectriques pour un temps d'irradiation nul.

Ces résultats montrent que l'amplitude du maximum des pertes diélectriques est proportionnelle au logarithme du produit $\mathcal{E}\theta$, intensité × temps d'excitation (c'est-à-dire au logarithme de l'énergie reçue par le produit), le coefficient de proportionnalité augmentant brusquement pour une certaine valeur de l'intensité, dépendant des conditions d'excitation. Il n'apparaît donc pas de saturation de l'effet photodiélectrique dans les limites de nos expériences, bien qu'elles aient été effectuées à l'aide de sources lumineuses intenses et après des durées d'excitation importantes. Il serait intéressant de reprendre ces expériences en étudiant *simultanément* le comportement diélectrique et la luminescence du sulfure de zinc en fonction de l'énergie d'irradiation.

Lettre reçue le 21 mai 1957.

BIBLIOGRAPHIE

[1] FREYMANN (R.), GRILLOT (E.), HAGENE (M.), LE PAGE (M.), *C. R. Acad. Sc.*, 1956, **243**, 1522.
[2] GARLICK, Luminescent Materials Clarendon Press, Oxford, 1949.
[3] RUAMPS, Diplôme d'Études Supérieures, Paris, 1947.
[4] LE FÈVRE (J. J.), Diplôme d'Études Supérieures, Rennes, 1957 (tirage limité).
[5] HAGÈNE (B.), LE FÈVRE (J. J.), VIe Colloque AMPÈRE, Saint-Malo. *Archives des Sc., Genève* (à paraître).

LE RALENTISSEMENT DES PARTICULES ATOMIQUES DE FAIBLE ÉNERGIE

Par Michel BAYET,
Faculté des Sciences de Toulouse.

Nous avons cherché à voir si la formule (3) donnée dans une précédente lettre [1], qui ne diffère de la formule de Bethe que pour les faibles valeurs de l'énergie E de la particule atomique incidente A, était susceptible de rendre compte des résultats expérimentaux dans ce domaine (quoique, en toute rigueur, notre calcul ne soit valable que pour une vitesse de A sensiblement supérieure à celle des électrons périphériques des atomes de l'élément ralentisseur). Ces résultats sont d'ailleurs malheureusement assez rares ; nous avons utilisé ceux de Phillips et de Weyl [2] tels qu'ils sont rapportés par Berthelot [3], qui sont relatifs aux protons et aux particules α dans différents gaz (air, H_2, He, A) ; nous avons effectué la comparaison dans le cas de l'hydrogène.

On sait que le pouvoir de ralentissement semble tendre vers 0 avec l'énergie, alors que notre formule :

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{4\pi n e^4 Z^2}{mV^2} \ln \left(1 + \frac{mV^2}{I'_1}\right) \qquad (3)$$

conduit à une limite positive finie : mais il suffit de tenir compte de la variation de la charge effective ζe de la particule, qui décroît simultanément de Ze à 0, pour obtenir le résultat cherché. Malheureusement les données concernant cette charge effective ne sont guère plus abondantes que pour le pouvoir de ralentissement ; nous avons utilisé celles qui sont rapportées par Berthelot [4] et Evans [5].

Prenant enfin $I'_1 = 9$ eV pour valeur de l'énergie caractéristique de l'hydrogène, et exprimant l'énergie en MeV, on voit facilement que le pouvoir de ralentissement par électron peut s'écrire, dans le cas des protons :

$$\left|\frac{1}{n}\frac{dE}{dx}\right| = \frac{0{,}23\,.\,10^{-21}}{E}\,\zeta^2 \ln\left(1 + \frac{E}{0{,}0083}\right) \qquad (3')$$

et pour les particules α :

$$\left|\frac{1}{n}\frac{dE}{dx}\right| = \frac{3{,}7\,.\,10^{-21}}{E}\left(\frac{\zeta}{2}\right)^2 \ln\left(1 + \frac{E}{0{,}033}\right) \qquad (3'')$$

Sur les figures (1) et (2), on a indiqué en trait plein les résultats expérimentaux, et en traits interrompus,

les courbes résultant des formules (3′-3″) ; les pointillés indiquent les valeurs que l'on obtiendrait en négligeant la variation de la charge effective.

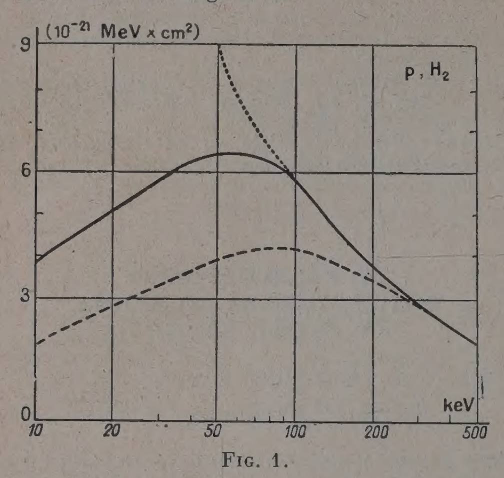


FIG. 1.

On constate que les formules (3′-3″) conduisent à des valeurs du même ordre de grandeur que les résultats expérimentaux, mais sensiblement plus faibles, ce qui prouve que les causes de ralentissement sont sous-estimées (quoiqu'il soit facile de voir que la théorie [1] qui permet d'établir la formule (3) conduise à admettre des échanges d'énergie sensiblement inférieure à l'énergie caractéristique I_1') ; il est donc superflu de faire intervenir des termes correctifs pour la « non participation » des électrons les plus liés. Par contre, il semble que les chocs élastiques entre particule incidente A et atome (ou molécule) neutre de l'élément ralentisseur (pris dans leur ensemble), dont l'importance est d'autant plus grande que la vitesse de A est faible sont susceptibles de rendre compte au moins d'une partie de l'insuffisance constatée.

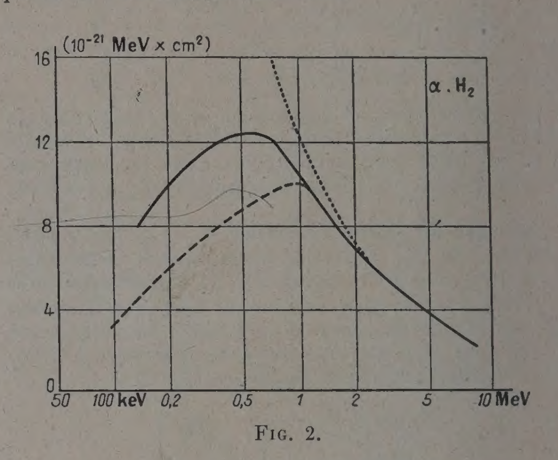


FIG. 2.

Lettre reçue le 22 mai 1957.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BAYET (M.), *J. Physique Rad.*, mai 1957.
[2] PHILLIPS (J. A.), *Phys. Rev.*, 1953, **90**, 532 ; WEIL (P. K.), *Phys. Rev.*, 1953, **91**, 289.
[3] BERTHELOT (A.), Rayonnements de particules atomiques. Ch. V (Masson, 1956).
[4] BERTHELOT (A.), *Loc. cit.*, ch. IV.
[5] EVANS (R. D.), The Atomic Nucleus, p. 636 (Mc Graw-Hill, 1955).

ERRATUM

Article de M. Y. Le Corre, mai 1957.

Page 314, Tableau II, 3e colonne de nombres. Supprimer, pour les systèmes rhomboédriques I et II et hexagonaux I et II, les coefficients réels 12,3. Les tableaux des systèmes hexagonaux deviennent ainsi identiques à ceux des systèmes quadratiques.

RÉSUMÉS DES ARTICLES

L'élasticité du milieu cristallin, par Jean LAVAL, Collège de France, Paris (*J. Physique Rad.*, 1957, 18, 369). — Les déformations linéaires (ou homogènes) sont celles qui conservent la périodicité du milieu cristallin. Elles font intervenir des coefficients d'élasticité statique qui sont aussi différents des coefficients de Voigt, prenant pour un cristal triclinique 45 valeurs distinctes. Rapportées à un système de référence lié au milieu cristallin libre de toute contrainte, les déformations linéaires sont en général rotationnelles. Le milieu cristallin est en équilibre, sous les tensions appliquées, lorsque l'énergie de la déformation est stationnaire par rapport aux rotations.

En outre, les coefficients d'élasticité statique et les coefficients d'élasticité dynamique (propres aux ondes élastiques) n'ont pas la même symétrie tensorielle, ils forment deux séries distinctes. Cette différenciation se produit si élevée que soit la symétrie du milieu cristallin. Elle est due au fait que les forces de cohésion entre les atomes ne sont pas centrales.

Sections efficaces d'interaction électron-électron et électron-ion dans les plasmas, par Michel BAYET, Faculté des Sciences de Toulouse (*J. Physique Rad.*, 1957, **18**, 380). — Après avoir rappelé les définitions des différentes sections efficaces d'interaction élastique, dont les valeurs sont infinies dans le cas de l'interaction coulombienne pure (c'est-à-dire dérivant d'un potentiel en $1/r$), on montre que dans le cas des gaz d'électrons que l'on rencontre réellement en pratique, gaz qui font partie d'un « plasma » globalement neutre au point de vue électrique par suite de la présence des charges positives, on peut obtenir des sections finies en appliquant les résultats de la théorie de Debye relative aux électrolytes, selon lesquels le potentiel varie alors comme $(r\, e^{r/D})^{-1}$. On discute les conditions d'application de cette théorie, et on calcule les sections efficaces correspondantes. On constate qu'elles varient approximativement comme la puissance — 2 de l'énergie électronique, et qu'elles sont souvent considérables, bien plus grandes en particulier que les sections efficaces électron-molecules neutres ; ceci explique l'échec des théories reposant sur l'assimilation des milieux ionisés à des « gaz de Lorentz » à prévoir la forme de la fonction de distribution des vitesses électroniques, laquelle est presque toujours maxwellienne, quoique à des températures T_e très supérieures à la température T des molécules du gaz.

Spineurs du second rang à composantes invariantes et formalisme spinoriel incluant les parités, par J. WINOGRADZKI, Institut Henri-Poincaré, Paris (*J. Physique Rad.*, 1957, **18**, 387). — On détermine tous les spineurs de Dirac du second rang dont les composantes sont invariantes par rapport à l'un des groupes suivants : groupe des retournements $x^k = \pm x'^k$, groupe de Lorentz orthochrone propre, groupe de Lorentz général. On montre que la connaissance de ces spineurs conduit à un formalisme spinoriel plus satisfaisant que la formalisme habituel.

Production de courant continu par une décharge en haute fréquence. II, par Mlle M. CHENOT, École Normale Supérieure des Jeunes Filles, Paris (*J. Physique Rad.*, 1957, **18**, 895). — Les expériences effectuées sur la fréquence de 22 MHz ont confirmé et étendu les résultats obtenus précédemment sur la fréquence de 7,69 MHz. Une étude générale sur l'influence de la fréquence de l'excitation haute fréquence a été faite entre 3,59 et 44,7 MHz ; elle a permis de suivre l'évolution du phénomène jusqu'aux pressions et aux fréquences qui assurent le passage le plus facile de la décharge dans le tube en service. Une coordination des résultats expérimentaux est proposée à partir de la connaissance des courbes de potentiel explosif et de potentiel d'entretien minimum de la décharge pour les différentes régions du tube délimitées par les électrodes successives.

Détermination de la surface de Fermi au moyen de l'effet De Haas-Van Alphen, par A. MARCHAND, Laboratoire de Chimie Générale, Faculté des Sciences, Paris (*J. Physique Rad.*, 1957, **18**, 403). — Mise au point sur l'effet De Haas-Van Alphen, principalement au point de vue de son emploi à la détermination de la surface de Fermi. Analyse de la théorie du phénomène fondamental, description de la technique expérimentale et indication des résultats obtenus jusqu'à présent.

ABSTRACTS OF THE PAPERS

Second rank spinors with invariant components and spinor formalism including parity, by J. Winogradzky, Institut Henri-Poincaré, Paris (*J. Physique Rad.*, 1957, **18**, 387). — Determination of all the second rank Dirac spinors whose components are invariant under the following groups : group of the inversions $x^k = \pm x'^k$, orthochronous proper Lorentz group, general Lorentz group. It is shown that the knowledge of these spinors leads to a more satisfactory formalism than the usual one.

High frequency discharge as direct current source. II, by Miss M. Chenot, École Normale Supérieure de Jeunes Filles, Paris (*J. Physique Rad.*, 1957, **18**, 395). — Experiments made at a frequency of 22 Mc/s have confirmed and developped previously obtained results at a frequency of 7,69 Mc/s. A general study of the influence of the frequency of excitation has been made at frequencies 3,59 Mc/s to 44,7 Mc/s ; it was possible to follow the evolution of the phenomenon up to pressures and frequencies giving the easiest discharge conduction through the tube. A coordination of experimental results is proposed based on the curves of breakdown potential and least maintainance potential of the discharge for the differents parts of the tube whose boundaries are fixed by successives electrodes.

Determination of the Fermi surface by the de Haas-Van Alphen effect, by A. Marchand, Laboratoire de Chimie Générale, Faculté des Sciences, Paris (*J. Physique Rad.*, 1957, **18**, 403). — This article reviews the De Haas—Van Alphen effect with stress on its use for the determination of Fermi's surface. The theory of the underlying phenomenon is analysed, the experimental technique is outlined and the results so far obtained are given.

Elasticity of the crystalline medium. III Linear deformations (static elasticity), by J. Laval, Collège de France, Paris (*J. Physique Rad.*, 1957, **18**, 369). — Linear (or homogeneous) deformations are those which preserve the periodicity of the crystalline medium. They arise from static elastic constants which are different from the Voigt elastic constants, having 45 distinct values for a triclinic crystal. When related to a reference system bound to the free crystalline medium, linear deformations are generally rotational. The crystalline medium is in equilibrium under the applied stresses when the deformation energy is stationary with reference to rotations.

Moreover, the static elastic constants and the dynamical elastic constants (specific to elastic waves) have not the same tensor symmetry ; they form two distinct series. This difference occurs however high the symmetry of the crystalline medium may be. It is due to the fact that the cohesive forces between the atoms are not central forces.

Effective electron-electron and electron-ion cross-sections in plasmas, by M. Bayet, Faculté des Sciences de Toulouse (*J. Physique Rad.*, 1957, **18**, 380). — Definitions of different effective cross-sections for elastic scattering are recalled, and it is pointed out that their values are infinite in the case of strictly Coulombian interaction (i. e, r^{-1} potential) ; but, in the case of actually existing electron gases, which are part of macroscopically neutral ,, plasmas " (because of positive ions), it is possible to find finite cross-sections, if one uses the results of Debye's theory of electrolytes, which states that the potential obeys a $(r\, e^{r/D})^{-1}$ law ($D =$ " Debye's length ").

Conditions of applicability of this theory are discussed, and effective cross-sections calculated. They approximately vary as E^{-2} ($E =$ electron energy), and are often very large, larger than the effective cross-sections between electrons and neutral molecules ; this explain the failure of the theories which treat the ionized media as " Lorentz's gases " when trying to predict the form of the distribution function of electron velocities : this distribution function is nearly always Maxwellian, but at temperatures T_e that are much larger than the temperature T of the gaseous molecules.